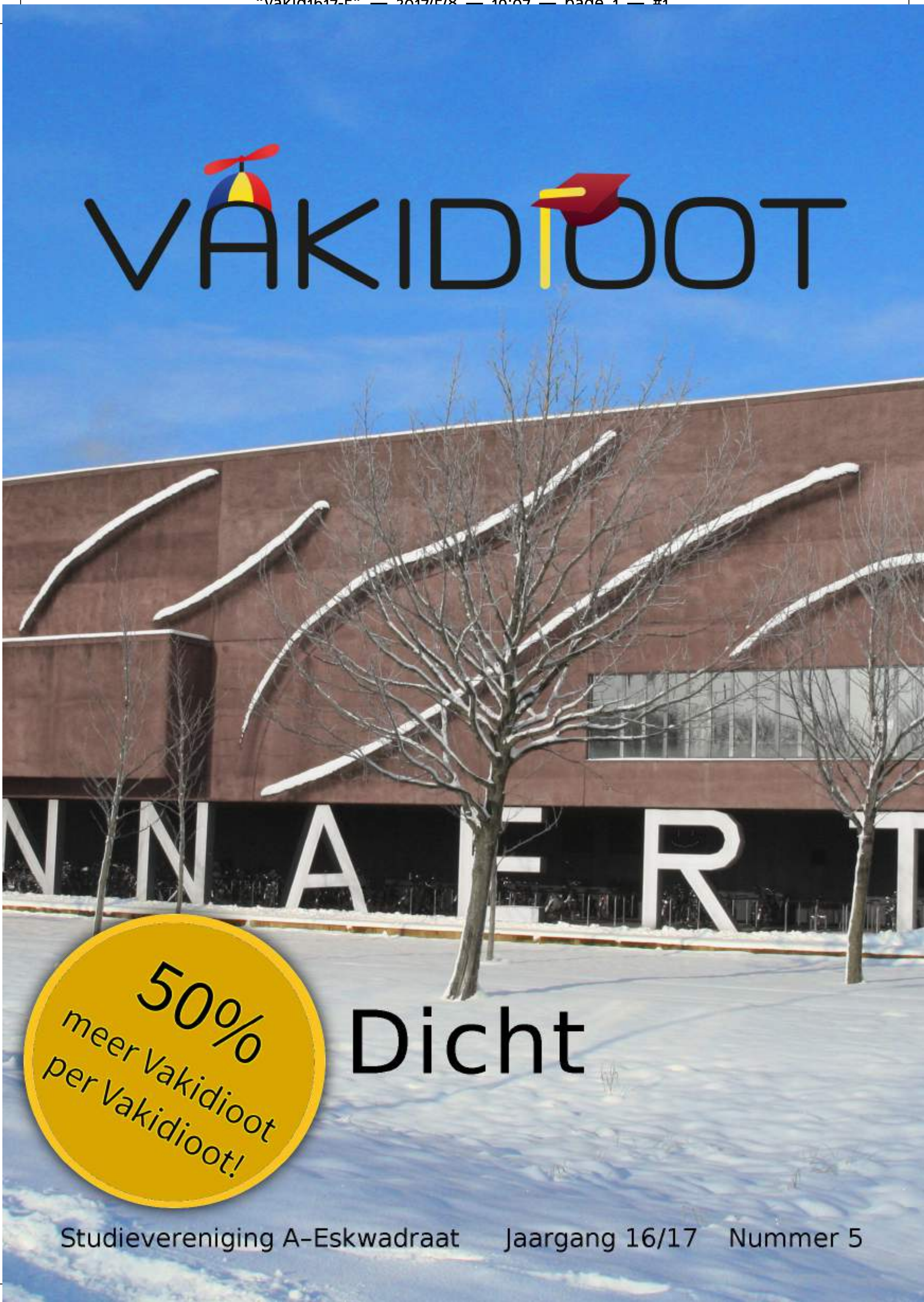


VAKIDIOOT

Dicht

Studievereniging A–Eskwadraat Jaargang 16/17 Nummer 5

VAKIDIOOT

In dit nummer

Uitgave 16 mei 2017
Oplage 1510
Deadline 28 mei 2017

De Vakidioot is een uitgave van
Studievereniging A–Eskwadraat
Princetonplein 5
3584 CC Utrecht

Telefoon (030) 253 4499
Fax (030) 253 5787
Website a-eskwadraat.nl/vakid
E-mail vakid@a-eskwadraat.nl

Wil je de Vakidioot niet meer ontvangen of ben je verhuisd? Pas dan je gegevens aan op a-eskwadraat.nl.

Redactie
Berend Ringeling
Bryan Brouwer
Chun Fei Lung
Jan Bastiaanssen
Koen van Baarsen
Luuk Hekkers
Marc Houben
Peter Speets
Sophie Huiberts
Tim Baanen

Eindredactie
Jim Vollebregt

Omslag
Tim Baanen

Redactioneel

Op moment van schrijven heb ik net een tentamenweek achter de rug. Een van mijn tentamens vond plaats in het niet erg dichtbijgelegen David Lloyd-gebouw. Bij binnenkomst in het gebouw vond er meteen een bestorming van de toiletten plaats. De deuren van het complex waren namelijk tot slechts tien minuten voor aanvang van het tentamen potdicht. Dicht op elkaar gepakt snelde men naar binnen om erachter te komen dat het licht het niet deed en de zeep op was.

Het moment dat de deuren van de hal dichtgaan, zou een periode van stilte moeten inluiden voor de duur van het tentamen. Het in Overvecht gelegen David Lloyd-gebouw, dat in feite een sporthal is, heeft deze luxe niet. De muren hadden net zo goed van papier kunnen zijn, zo geluidsdicht zijn ze. Het feit dat een motorclub blijkbaar net die dag heeft uitgekozen om met ronkende motoren voorbij te razen, is dan ook niet erg gunstig.

Met zo veel lawaai klap je al snel dicht en kun je geen concentratie meer opbrengen. Dat is jammer, want zo'n tentamen is toch een moment waarop je optimaal wilt presteren. Een andere taak waarbij opperste concentratie vereist is, is het schrijven van een Vakidiootartikel. Dus lees snel verder voor je dit blaadje dichtslaat.

Jim Vollebregt
Eindredacteur

Van het bestuur

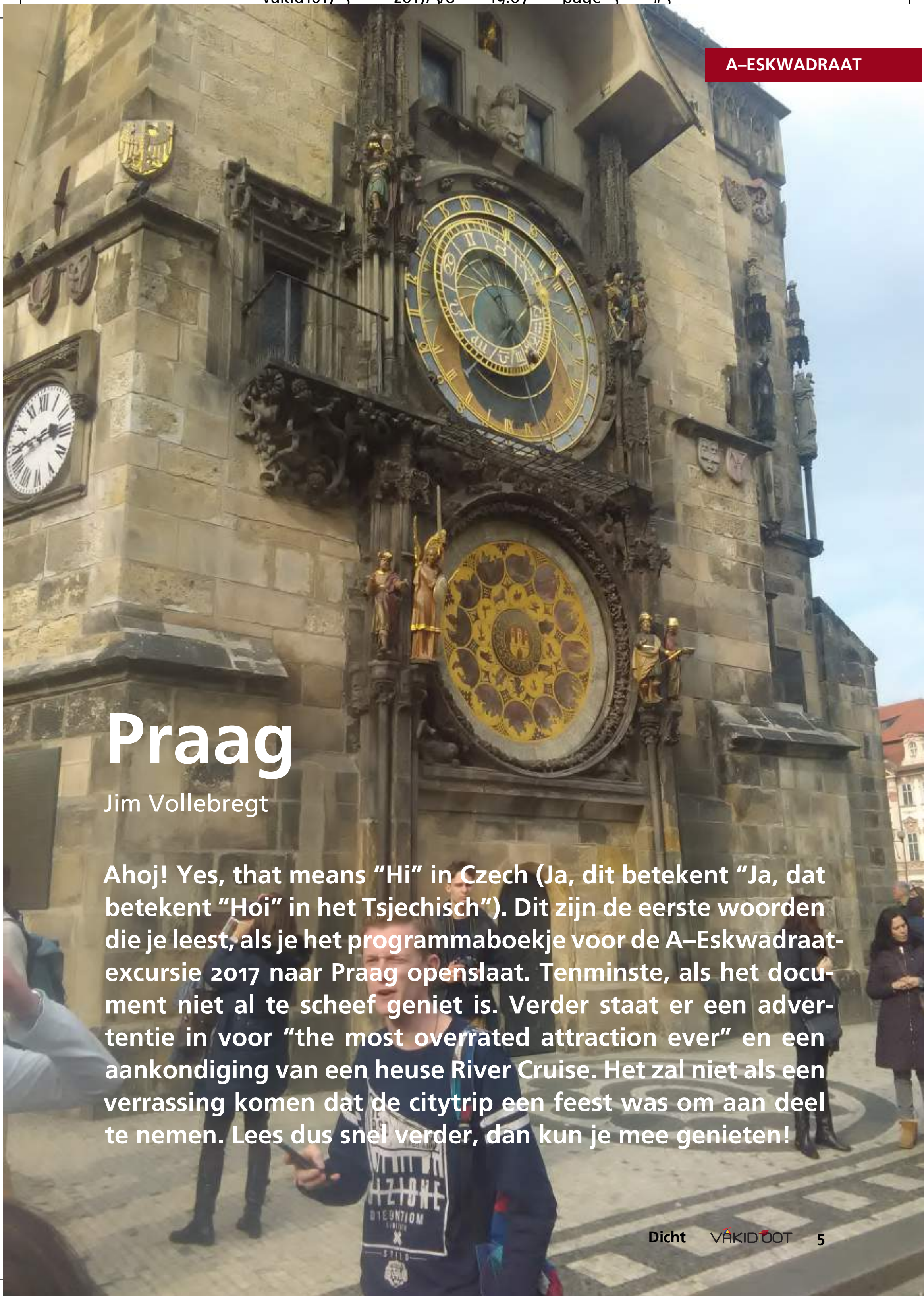
Milo de Plomp
Commissaris Onderwijs A–Eskwadraat

Zelf ben ik niet echt een schrijver, al word ik er tijdens dit jaar wel beter in, maar zeker geen dichter. Dus ik ga mij niet eens wagen om een gedicht te maken. Deze bestaan bij mij voornamelijk uit Sinterklaasrijmpjes of een toevallige haiku. Maar zoals jullie al weten uit een ander stukje, zit er iemand in het bestuur die dit wel kan. Dus speciaal voor deze "Van de Voorzitter" een "Van de Onderwijs".

Jullie weten het al, het is geen geheim: deze Onderwijs houdt zeker van een goede rijm. Dus toen Arjan met het verzoek om een stukje te schrijven naar me toe kwam, was ik degene die deze taak op zich nam. "De deadline is trouwens wel over een paar uur", was wat hij er toen even snel over zei. Dat was dan wel jammer, want die deadline kwam wel heel snel dichtbij. Maar goed, ik denk dat Arjan vooral heel blij was dat ik hem van deze taak verloste. En toegegeven, zoveel tijd hoeft het maken van een gedichtje nou ook weer niet te kosten.

Het lijkt mij overigens redelijk moeilijk om je voor een gemiddeld stukje aan het thema te houden. Nu lijkt deze dichtvorm mij daarvoor al genoeg, dus er is niets dat mijn van inhoudelijk vrijheden kan weerhouden. Als je denkt dat dit stukje puur om rijm en niet om inhoud zou gaan: niet getreurd. Er is de laatste tijd namelijk genoeg in ons bestuursleven gebeurd. Ooit moeten wij stoppen als bestuur, ook al hebben wij ons tot nu toe ontzettend vermaakt. Toch hebben wij om die reden recentelijk onze opvolgers bekend gemaakt. Een groep van 7 enthousiastelingen staat te trappelen om er net zo'n mooi jaar als ons van te maken. Voor het zover is, mogen ze zich echter nog even, als alles goed gaat, als KB'ers vermaken. Wij hebben heel veel vertrouwen in ze, maar het kiezen van opvolgers is niet het enige dat recentelijk gebeurd is. Het kan bijna niet anders, dan dat je iets hebt meegekregen van onze kermis. Het was een spectaculaire dag, waarbij onze attracties te zien waren vanaf grote afstand. De kermis was voor iedereen een groot succes, maar vooral ook lekker extravagant. Maar ook binnenkort gebeuren er nog mooie dingen: wat dacht je bijvoorbeeld van de Carrièremaand of UPC? Dat laatste belooft een prachtevenement te worden, vol met natuurkundige magie. En met deze korte update denk ik dat het een mooi moment is, om mijn stukje af te sluiten. Ik heb wel weer even genoeg creativiteit kunnen uiten.

Hopelijk hebben jullie genoten van deze speciale uitvoering. De volgende zal wel weer de vertrouwde oude "Van de Voorzitter" zijn.



Praag

Jim Vollebregt

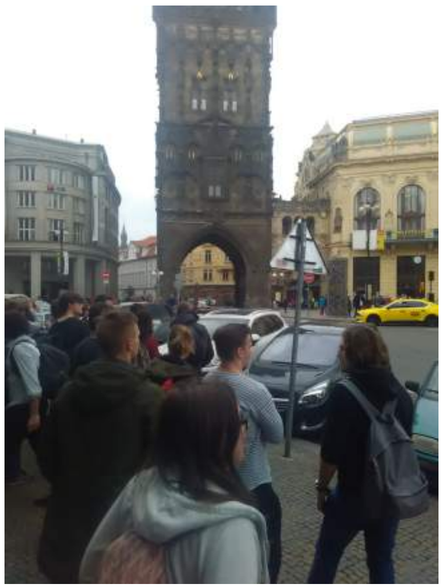
Ahoj! Yes, that means "Hi" in Czech (Ja, dit betekent "Ja, dat betekent "Hoi" in het Tsjechisch"). Dit zijn de eerste woorden die je leest, als je het programmaboekje voor de A–Eskwadraat-excursie 2017 naar Praag openslaat. Tenminste, als het document niet al te scheef geniet is. Verder staat er een advertentie in voor "the most overrated attraction ever" en een aankondiging van een heuse River Cruise. Het zal niet als een verrassing komen dat de citytrip een feest was om aan deel te nemen. Lees dus snel verder, dan kun je mee genieten!

Tijd dus voor de Grote Excursie naar Praag. Ik sta te popelen om jullie te vertellen over alle leuke avonturen die we in de hoofdstad van Tsjechië hebben meegemaakt. Echter zal ik, zoals het een goed journalist betaamt – en uit het oogpunt van sensatie – ook de minder flatteuze momenten verslaan. Maar eerst: ere wie eer toekomt. En dat is natuurlijk, ondanks alles, de ExcurCie: de geweldige commissie die deze activiteit mogelijk heeft gemaakt. Ik kan niet anders zeggen dan dat ik genoten heb van dit evenement en ik heb er vertrouwen in dat de andere deelnemers er net zo over denken. Het is altijd fijn om op reis te gaan zonder dat je daarvoor zelf iets hoeft te organiseren. Toch kan zelfs het meest formidabele gezelschap niet hopen zonder abuis een activiteit als deze te organiseren.

De aftrap voor dit evenement was op station Amsterdam Sloterdijk, waar we met z'n allen drie kwartier te vroeg aanwezig waren om op de Flixbus te wachten. Een goed moment om de programmaboekjes uit te delen. Deze waren, zoals reeds vermeld, scheef geniet. Bovendien waren ze overwegend inaccuraat, maar daar kom ik later op terug.

Inmiddels ben ik aardig vertrouwd met de gebruikelijke proloog van de A–Eskwadraat-stadsbezoekjes. Een nachtelijke busreis die er hoe dan ook voor zorgt dat je gesloopt en wel aankomt op de plek van bestemming. Het enige wat je kunt doen, is je uit alle macht concentreren om niet te denken aan hoe verschrikkelijk deze noodzakelijke marteling is en gewoon proberen wat te slapen. Dat werd echter bemoeilijkt door het feit dat we midden in de nacht gezelschap kregen van een dozijn Duitsers die vanwege hun niet geringe omvang twee stoelen per persoon nodig hadden. Het woord aardbeving komt bovendrijven als ik nadenk over de juiste formulering om hun entree in de bus te omschrijven. En alsof dat nog niet genoeg ongemak was, had elk van hen een portie sterk aromatisch voedsel bij zich, zodat de bus al snel naar een afgekeurde snackbar rook. Het enige lichtpuntje was dat een van de Hannoveranen aan Ed Sheeran deed denken. Dat is toch iets waar je je wanhopig aan vasthoudt op zo'n moment van totale vertwijfeling.

De trip van de bushalte naar hostel Marabou was een mooie gelegenheid om de benen even te strekken, nadat ze een half etmaal dubbelgevouwen hadden gezeten. Het was een mooie ochtendwandeling die meteen langs enkele bezienswaardigheden voerde, zoals een groot reclamescherm dat een leerprogramma om kinderen een tweede taal bij te brengen adverteert en een sfeervol snelwegknooppunt.



Figuur 1: De eerste dag staat iedereen toch een beetje de kat uit de boom te kijken.

Maar even zonder ongein, het hostel zelf was veel beter dan van een studentenreisje mag worden verwacht. In dat opzicht zijn we echt in de watten gelegd. Alleen al de knusse banken waren een welkom soelaas na de vele wandelingen die nog zouden komen. Maar het personeel maakte het pas echt tot een paradijsje. Even Serieus, mocht je ooit in Praag moeten overnachten: Hostel Marabou is de plek!

Nadat we onze spullen hadden gedumpt, was het tijd voor de Praag Tour. Het was prachtig weer, dus zodra we het centrum hadden bereikt, vertraagde iedereen tot een gemoedelijk kuieren om de pracht en praal van de Tsjechische hoofdstad – denk hierbij aan de Karelsbrug en, jawel, de meest overschatte bezienswaardigheid van Europa – in zich op te nemen. Of, nou ja, bijna iedereen, want de leden van de Excur-Cie hielden een moordend tempo aan. Meer dan eens dreigden ze uit het zicht te verdwijnen en moesten we het op een holletje zetten om ze bij te houden. De route eindigde met een respectabele klim, maar dat leek de commmisie niks te kunnen schelen. Die gasten hebben een ijzeren conditie, zoveel is duidelijk.

Figuur 2: De Tsjechische Hot Chocolat heeft een verrassend hoge viscociteit.

Er volgde een moment van vrije tijd, waarin ik met een klein groepje de Praag Tour nog eens dunnetjes overgedaan heb. Na een paar uur struinen door de steegjes en achterstraatjes, over de binnenhoven en marktjes, van Praag laafden we ons in een keurig cafeetje aan koffie of Hot Chocolat. Hierna was het tijd voor het avondeten, waarvoor we gezellig met de hele groep in een typisch Tsjechisch restaurant hadden afgesproken. Het werd hier nog maar weer eens duidelijk hoeveel men in Praag van bier houdt. Van de biersoep als voorgerecht tot de biertaart als nagerecht (dit is geen grap): alles is ermee doordrenkt. Het is ook nodig om te vermelden dat ik na afloop zeer dankbaar was dat ik niet voor het enige vegetarische hoofdgerecht had gekozen. Dat scheen een soort kaaswrap te zijn die zowel qua geur als qua aanzien veel weg had van een wollen zweetsok.

Figuur 3: Het Museum of Communism in Praag maakt reclameposters die ook kinderen aanspreken!

Ik skip hier even het gedeelte waar iedereen tot diep in de nacht ging feesten enzo, omdat ik daar weinig van heb meegekregen en fast-forward naar de volgende ochtend waarin ik samen met een groepje de dag begon met een uitstekend ontbijt in het hostel, gevolgd door een bezichtiging van het reusachtig standbeeld van een man te paard dat op de heuvel achter ons hostel prijkte. Het weer was minder goed dan de dag ervoor, maar het uitzicht vanaf het monument was nog steeds zeer de moeite waard.

Figuur 4: Natuurlijk laat A–Eskwadraat zijn handtekening achter op de beroemde John Lennon Wall. (DOE-TIP: vindt de handtekening.)

Na een vluchtig aandoen van de Billa[1] begeleidde de ExcurCie ons naar het museum waar we **gratis naar binnen mochten met onze studentenkaart!** De commissie is zelfs ongeveer vijf minuten met ons mee naar binnen geweest. Daarna zijn ze uiteraard verdwenen om belangrijkere dingen te doen, een terugkerend fenomeen tijdens de excursie. Op een gegeven moment kwam ik er achter dat ik met nog één ander persoon in het museum verkeerde terwijl de rest van de groep allang vertrokken was. Nou ja, dan maak je er met z'n tweeën wat leuks van. We hebben de John Lennon Wall bekeken, de Praagse Eiffeltoren beklommen, een blik geworpen op een Amerikaanse enclave en zijn waarschijnlijk opgelicht in een pizzarestaurant. Kortom, we hebben de echte Praag-experience beleefd. Wat de anderen hebben meegemaakt kan ik alleen maar naar raden, maar ik neem aan dat ze zich wel vermaakt hebben.

Figuur 5: Op dit bordje staat: *Keep Out. US Government Property.* Interessant.

Om negen uur hadden we met de commissie afgesproken aan de oostkant van de Karelsbrug. Toen om kwart over negen de commissie er ook was, zijn we met de hele groep naar een pittoreske café gelopen waar je kon tafelvoetballen. Dat was echter niet de enige attractie die ze er hadden, je kon er namelijk ook gratis meeroken. De hele tent was, zonder overdrijven, mistig van de sigarettenrook. Nu houd ik niet zo van roken, dus ben ik met een gelijkgestemde vertrokken om nog een drankje te doen in een mid-

[1] Een supermarkt.

deleeuwse bar met live accordeonmuziek.

Ik skip hier weer even het gedeelte waar iedereen tot diep in de nacht ging feesten, omdat ik dat om een of andere reden gemist heb – en omdat ik veronderstel dat degenen die er wel bij waren er toch niet zoveel meer van weten – en fast-forward naar de volgende ochtend die weer bestond uit een uitgebreid ontbijt in het hostel. Dit ging gepaard met een gemoedelijke discussie over een irrelevant vraagstuk die wat mij betreft net iets te lang voortduurde. Nou ja, een zinloze discussie aangaan, dat is een keuze waar je anderen niet op aan kunt spreken.

De middag stond in het teken van een bezoek aan de Joodse wijk van Praag. Het indrukwekkendste moment van de hele excursie was voor mij de wandeling over de serene begraafplaats die rechtstreeks uit een fantasieverhaal lijkt te komen. Het is ongelofelijk hoe dicht opeengepakt de verweerde grafstenen hier stonden. Er is een kronkelpaadje dat tussen de stenen door slingert waar geen einde aan lijkt te komen. Het druilerige weer droeg alleen maar bij aan de naargeestige sfeer. Hierna hadden we een iets vrolijker noot met een bezoek aan de grootste boekwinkel en de kleurrijkste speelgoedwinkel van Praag. Ook hebben we de Praagse lekkernij trdelník geproefd. Lekker!

Toen was het helaas alweer tijd om onze spullen op te halen bij het hostel. Met z'n allen waren we drie kwartier te vroeg bij de bushalte. Dientengevolge werden we geconfronteerd met de gepassioneerde afscheidsrituelen van klaarblijkelijk over hun oren verliefde stelletjes. In de bus kregen we weer gezelschap van Ed Sheeran en zijn gewichtige aanhang. Op de terugweg heb ik me echter meer geërgerd aan twee heren die wanhopig probeerden indruk te maken op een Russisch meisje. Deze balts nam verscheidene uren in beslag.

En zo kwamen we aan op het station en zocht ieder zijn eigen weg naar huis. De commissie was natuurlijk al lang en breed verdwenen dus het afscheid nemen duurde niet al te lang. Zo eindigde een geslaagde excursie naar Praag!

WISKUNDE

De enveloppenparadox

Merlijn Staps

Door welk misverstand dan ook krijg je van iemand twee enveloppen aangeboden. Beide enveloppen zitten dicht en bevatten een onbekend geldbedrag. Je krijgt te horen dat de ene envelop twee keer zo veel geld bevat als de andere. Je mag nu één van de enveloppen openmaken, kijken hoeveel geld erin zit, en dan besluiten welke envelop je wil hebben. Als je je ten doel stelt om met zo veel mogelijk geld naar huis te gaan, hoe moet je dan je keuze maken?

Veronderstel dat de envelop die je openmaakt het geldbedrag X bevat. De andere envelop bevat dan ofwel $2X$, ofwel $\frac{1}{2}X$. De verwachtingswaarde van het geldbedrag in de andere envelop is dus $\frac{1}{2}(2X + \frac{1}{2}X) = \frac{5}{4}X > X$ (er is immers geen reden om aan te nemen dat $2X$ waarschijnlijker is dan $\frac{1}{2}X$, of vice versa), dus je doet er verstandig aan om te wisselen. Maar als je ongeacht de waarde van X zou moeten wisselen, kun je ook al besluiten te wisselen, voordat je de envelop openmaakt. Maar dan klopt er iets niet, want dan geven we kennelijk voor allebei de enveloppen de voorkeur aan de andere envelop.

Als je in je studie met kansrekening in aanraking bent gekomen, ben je puzzels al deze waarschijnlijk al wel moe. Je reactie is dan "vertel me eerst maar eens welke kansruimte je precies bekijkt" of "waarom zouden $2X$ en $\frac{1}{2}X$ even waarschijnlijk moeten zijn" of "je moet altijd wisselen, want de quizmaster weet achter welke deur een geit staat." Desalniettemin hoop ik je te overtuigen dat deze "paradox", ook wanneer je de bijbehorende kansruimte specificeert, verrassende eigenschappen heeft. Voor wie niet de ervaring heeft dat het specificeren van kansruimtes iets is om blij van te worden, volgt aan het einde ook nog een variant van de paradox waar helemaal geen kansrekening in voor komt.

We beginnen met een aantal echte berekeningen, waarin we ervan uitgaan dat we precies weten hoe het geldbedrag in de enveloppen tot stand komt. Laten we A het bedrag in de goedkoopste envelop noemen. Als we de verdeling van A helemaal specificeren, verandert de "paradox" in een probleem dat je bij het vak kansrekening tegen zou kunnen komen. Veronderstel bijvoorbeeld dat $A \sim \mathrm{Exp}(1)$ exponentieel verdeeld is met gemiddelde 1. Als in onze envelop een bedrag X zit, dan zit in de goedkope envelop ofwel X, ofwel $\frac{1}{2}X$. De verwachtingswaarde van het bedrag in de andere envelop is gelijk aan

$$\frac{e^{-X}}{e^{-X} + e^{-X/2}} \cdot 2X + \frac{e^{-X/2}}{e^{-X} + e^{-X/2}} \cdot \frac{X}{2} = X \cdot \frac{2e^{-X} + \frac{1}{2}e^{-X/2}}{e^{-X} + e^{-X/2}}.$$

Dit is groter dan X precies wanneer $2e^{-X} + \frac{1}{2}e^{-X/2} > e^{-X} + e^{-X/2}$, oftewel wanneer $2e^{-X} > e^{-X/2}$, oftewel wanneer $X \leq 2 \log 2$. Dit betekent dat je van envelop moet wisselen wanneer er weinig geld in je envelop zit. Intuïtief ligt dit voor de hand: als je al een hoog bedrag in je eigen envelop hebt zitten, hoef je niet meer te wisselen.

Er bestaan echter ook voorbeelden waarbij je altijd moet wisselen. Veronderstel dat A altijd een tweemacht is, dus van de vorm 2^m met $m = 0, 1, 2, \ldots$. Neem bovendien aan dat $\mathbb{P}(A = 2^m) = \frac{1}{3}(2/3)^m$. (Merk op dat $\frac{1}{3}\sum_{m \geq 0}(2/3)^m = 1$.) Als we in onze envelop het bedrag 2^n tegenkomen, dan zit in de goedkope envelop 2^{n-1} of 2^n. Als $n = 0$ moeten we natuurlijk sowieso wisselen. Zo niet, is het verwachte geldbedrag in de andere envelop gelijk aan

$$\frac{\mathbb{P}(A=2^{n-1})2^{n-1}+\mathbb{P}(A=2^n)2^{n+1}}{\mathbb{P}(A=2^{n-1})+\mathbb{P}(A=2^n)}=\frac{2^{n-1}(2/3)^{n-1}+2^{n+1}(2/3)^n}{(2/3)^{n-1}+(2/3)^n}=\frac{11}{10}\cdot 2^n.$$

Dit is altijd groter dan 2^n, dus je moet altijd wisselen. In de andere envelop verwacht je 10% meer geld te vinden.

De "paradox" ontstaat wanneer je de verwachtingswaarde $\frac{5}{4}X$ berekent door er vanuit te gaan dat het even waarschijnlijk is dat je de dure als de goedkope envelop hebt. Aanvankelijk is dat inderdaad zo, maar het is niet gezegd dat dit waar blijft wanneer je conditioneert op het bedrag X dat je in jouw envelop vindt. Je lijkt hier een veel sterkere aanname te gebruiken: dat elk geldbedrag X aanvankelijk even waarschijnlijk is. In de filosofie van de kansrekening heet dit ook wel het "onverschilligheidsprincipe": als een experiment n mogelijke uitkomsten heeft (waarvan er altijd precies één optreedt) die we verder niet van elkaar onderscheiden, ligt het voor de hand om elke mogelijke uitkomst kans $\frac{1}{n}$ toe te dichten. Hier hebben we echter met oneindig veel mogelijke uitkomsten te maken: het uitgangspunt dat elk van deze getallen even waarschijnlijk is, heet in de Bayesiaanse statistiek een oneigenlijke *a priori*-verdeling ("improper prior"), omdat er geen uniforme kansverdeling is op de niet-negatieve reële getallen.

Het voorbeeld waarin je wel degelijk altijd moet wisselen, heeft als eigenschap dat het verwachte bedrag in elke envelop oneindig groot is (inderdaad: $\mathbb{E}A = \sum_{m\geq 0}\frac{1}{3}(2/3)^m 2^m = \frac{1}{3}\sum_{m\geq 0}(4/3)^m=\infty$). De verwachtingswaarde van het bedrag in beide enveloppen is oneindig. Als je een envelop open maakt, is het bedrag wat erin zit echter met kans 1 eindig. Als er geen enkele relatie zou zijn tussen de bedragen in de enveloppen, zou je hierom ook altijd willen wisselen: je wisselt dan iets wat met kans 1 eindig is, uit tegen iets dat oneindige verwachtingswaarde heeft (of je keuzes baseren op zo hoog mogelijke verwachtingswaardes zinvol is, is een andere discussie).

Een andere manier nog om hier tegenaan te kijken is als volgt: zij X het bedrag in jouw envelop, en X' het bedrag in de andere. Je besluit om te wisselen indien $\mathbb{E}[X' \mid X] > X$. Je moet altijd wisselen als $\mathbb{E}[X' \mid X] > X$ waar is met kans 1. Aan beide kanten de verwachtingswaarde nemen geeft $\mathbb{E}X' > \mathbb{E}X$. Als X eindige verwachting heeft, geldt juist $\mathbb{E}X = \mathbb{E}X'$ en is dit een tegenspraak (dus: als het verwachte geldbedrag eindig is, kan het niet gebeuren dat je altijd moet wisselen). Als X oneindige verwachting heeft, probeer je nu onderscheid te maken tussen verwachtingswaardes die allemaal oneindig zijn. De tegenspraak verdwijnt.

Kortom: ogenschijnlijke "paradoxen" worden vanzelf minder paradoxaal als je een kansruimte specificeert, kansrekening wordt ook echt een beetje tegenintuïtief als je met oneindige verwachtingswaardes te maken krijgt, en toepassen van het onverschilligheidsprincipe betekent soms ook een soort onverschilligheid aangaande de correctheid van je analyse.

Het is ook mogelijk om de paradox zo te formuleren dat hij niet meer met kansrekening of onwaarschijnlijkheid van doen heeft. Veronderstel namelijk dat de ene envelop Y bevat en de andere $2Y$. Dan kun je met wisselen evenveel winnen als verliezen ($-Y$ of $+Y$). Echter, als in de envelop die je krijgt een bedrag X zit, kun je X winnen of $\frac{1}{2}X$ verliezen door te wisselen, dus je hebt dan juist meer te winnen dan te verliezen... Wat er met dit argument aan de hand is mag je zelf verzinnen.

Meer lezen? Dominic Yeo houdt een blog bij met nog veel meer leuke verhalen over kansrekening en stochastiek: `https://eventuallyalmosteverywhere.wordpress.com/`.

POLITIEK

Nederland in 150 delen

Een alternatieve politieke realiteit

Bjarne Kosmeijer

Zoals het de meesten wel zal zijn opgevallen hebben we in Nederland zo'n twee maanden geleden verkiezingen gehad. De mensen die mijn politieke voorkeur kennen, zullen begrijpen dat deze verkiezingen voor mij een dicht boek zijn (iets met -29). Ik zal dus niet uitweiden over de politieke inhoud, bijvoorbeeld Wilders die zegt dat alle grenzen dicht moeten. Nee, in plaats daarvan wil ik het graag hebben over het trekken van grenzen, oftewel: Nederland in een districtenstelsel!

Het gedachtenexperiment is zeker de moeite waard: in Nederland zijn we na de verkiezingen vaak een respectabele tijd bezig met het formeren van een regering (op het moment van schrijven is de formatie al 40 dagen bezig zonder ogenschijnlijke vooruitgang), omdat er een grote variëteit aan partijen in het parlement zit. Dit steekt bijvoorbeeld af tegen het Verenigd Koninkrijk, waar (sinds 1945 met uitzondering van 1974 en 2010) er altijd een meerderheid voor een enkele partij was, zelfs als deze partij maar 35% van de stemmen haalde (zie 2005). Ook de Verenigde Staten hebben een districtenstelsel, ofschoon de situatie hier niet helemaal te vergelijken is, doordat de VS een presidentieel bestel hebben, en het VK en Nederland een parlementair systeem.

Het begin van dit gedachtenexperiment is het wiskundig interessantste deel: het opdelen van het land in 150 districten. Zoals ik een jaar of twee geleden al schreef: het tekenen van de districten geeft macht. Zie de VS, waar 'gerrymandering' een permanente meerderheid voor de Republikeinen heeft gecreëerd. Dientengevolge is door de jaren heen veel onderzoek gedaan naar algoritmes om dit soort districten te tekenen. Omdat de hoeveelheid ruwe data alleen maar handelbaar is, als de districten min of meer langs gemeentegrenzen getrokken worden, zullen we de meest interessante algoritmes niet kunnen gebruiken.

Het begin van de districtenverdeling is het verdelen over de 12 provincies [1] Hiervoor gebruiken we de rekensleutel die in de VS gebruikt wordt, waar de zetels achter elkaar gegeven worden aan de staten die tot dan toe het slechtst vertegenwoordigd zijn, totdat alle zetels verdeeld zijn (voor de geïnteresseerden: de methode van Huntington-Hill). Dit leidt tot deze verdeling:

Drenthe:	4 zetels	Groningen:	5 zetels	Overijssel:	10 zetels
Flevoland:	4 zetels	Limburg:	10 zetels	Utrecht:	11 zetels
Friesland:	6 zetels	Noord-Brabant:	22 zetels	Zeeland:	3 zetels
Gelderland:	18 zetels	Noord-Holland:	25 zetels	Zuid-Holland:	32 zetels

Met de verdeling over de provincies bepaald kan het echte werk beginnen: het trekken van grenzen. Om de verwerking van de uitslagen eenvoudig te houden, trekken we de grenzen zoveel mogelijk langs gemeentegrenzen. Dit geeft de aanzet voor een leuke wiskundige

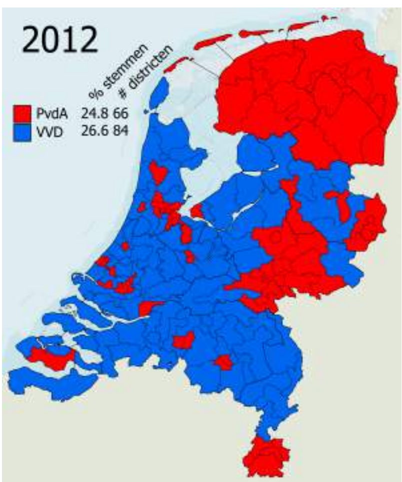
[1] De NOS heeft vlak na de verkiezingen al een artikel hierover geschreven. Daarbij zijn de districten getekend zonder inachtneming van provinciegrenzen, maar, omdat in meeste districtenstelsels dit soort bestuurlijke lagen behouden blijven, tekenen wij de districten wel binnen een enkele provincie.

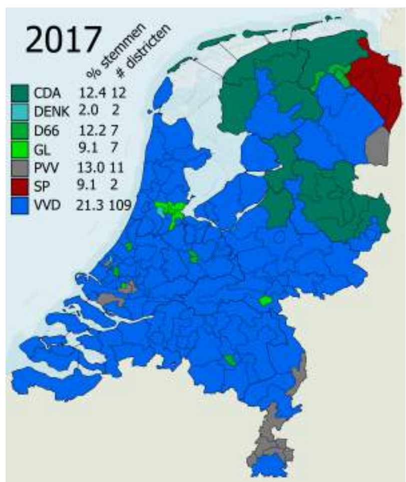
formulering. Idealiter gaat men nu namelijk op zoek naar de verdeling van de gemeentes in samenhangende blokjes, zodanig dat de bevolking het best verdeeld wordt: *bring in* grafentheorie! Wat we nu hebben, is een ongerichte vlakke graaf met g knopen elk met een gewicht die we willen verdelen in d samenhangende deelgrafen, zodanig dat de verdeling van het gewicht het meest optimaal is.

Tot zover de blijdschap. Het blijkt namelijk dat het zoeken van samenhangende partities van een graaf een vrij lastig probleem is, computationeel gezien. Het rest ons het naïeve algoritme te gebruiken wat alle partities langsgaat, een algoritme van orde 2^n, ter illustratie: voor een provincie als Utrecht zou de rekentijd langer zijn dan de leeftijd van het heelal. Met het naïeve algoritme dat gebruik maakt van kleine regio's, verkrijgen we uiteindelijk een, misschien niet optimaal, maar zeer respectabel resultaat, namelijk de volgende 150 districten:

Het blijkt dat het gebruik van dit algoritme zelfs een andere wens voor een districtenkaart vervult: enige vorm van compactheid. Ofschoon er natuurlijk altijd enkele uitzonderingen zijn, zoals bijvoorbeeld het district in het uiterste westen van Gelderland wat als een volleerde salamander om de gemeente Neerijnen kromt (op dit moment mag u nadenken over de etymologie van het woord gerrymandering).

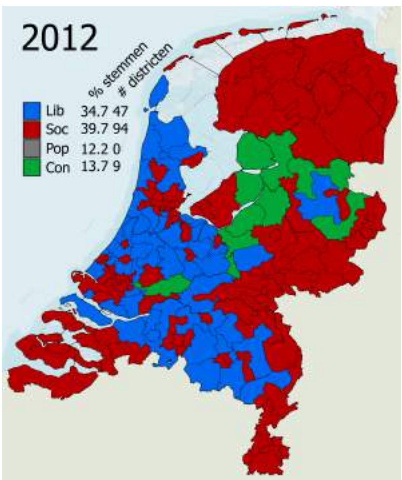
Al het geneuzel over het trekken van de districten achter ons latend (ofschoon dit voor de gemiddelde A–Eskwadrater het potentieel interessantste stuk is), gaan we kijken naar wat dit systeem ons zou opleveren bij de laatste twee verkiezingen, 2012 en 2017:

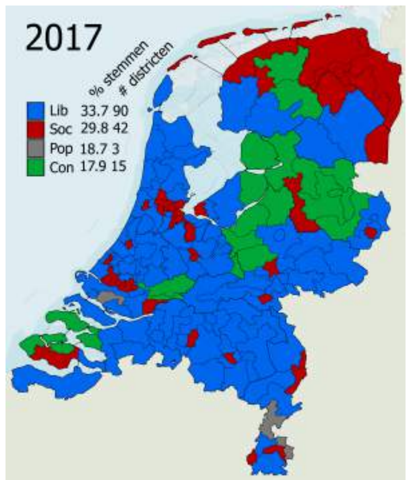




Het eerste punt wat hier meteen gemaakt kan worden, is dat dit natuurlijk appels met peren vergelijken is. Inherent aan een districtenstelsel is dat partijen samenklonteren in ideologische blokken, omdat anders de grootste partij een overgrote meerderheid haalt. De VVD, welke slechts 21% van de stemmen kreeg in 2017, zou 73% van de zetels krijgen.

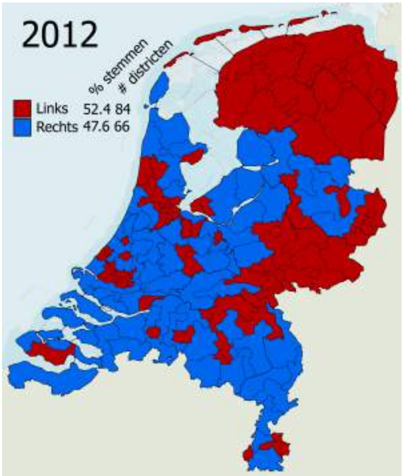
We kunnen dit samengaan van stromingen makkelijk simuleren, namelijk door de uitslagen van de verschillende partijen bij elkaar op te tellen. Als we dit doen voor een landschap als het VK, krijgen we een interessant beeld. We delen de partijen op in de blokken Socialisten, Liberalen, Confessionelen en Populisten. Het resultaat is als volgt:

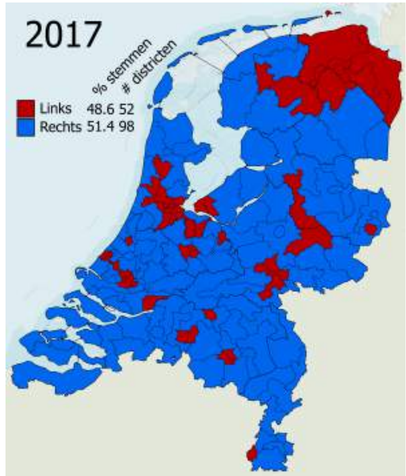




Een aantal dingen vallen op, bijvoorbeeld dat in dit systeem links in 2012 een grote verkiezingsoverwinning had geboekt, om maar eens te benadrukken dat de metriek waarlangs je de uitslag legt bijna belangrijker is voor de politieke realiteit dan de daadwerkelijke stemmen. Ook valt op dat er een bepaalde gelijkenis is met het Verenigd Koninkrijk in dat de confessionele partijen met grofweg hetzelfde aantal stemmen veel meer zetels halen dan de populisten, omdat hun steun veel geconcentreerder is.

Nou kan je nu opmerken (misschien terecht) dat deze indeling gemaakt is om links wat extra opschmuck te geven, en dus gaan we nog een stap verder. We delen de partijen op in links en rechts, noem dit voor mooie namen maar het Amerikaanse systeem. We krijgen:





De overwinning van links in 2012 wordt nog wat geaccentueerder, ofschoon het verschil in stemmen vrij miniem is. Tegelijkertijd is 'de teloorgang van links' in 2017 bescheiden in aantal stemmen, maar is een swing van 3.8% genoeg voor een swing van 32 districten. Dat is dan weer het nadeel van 'eerlijke' districten, bij het minste of geringste vallen zetels in andere handen.

We zien dat het Nederlandse politieke landschap er heel anders zou uitzien onder een districtenstelsel. Als het ook opvalt hoe snel een partij of stroming een meerderheid haalt onder zo'n systeem, is waarschijnlijk de beste conclusie dat de Nederlandse polder nog zo slecht niet is. Als laatste nog wat leuke feitjes: het meest rechtse stukje Nederland is het Westland, waar bij de laatste verkiezingen 73% op een rechtse partij stemde, en het meest linkse stukje is Amsterdam-West waar 78% links stemde. Het meest gemiddelde stukje Nederland is Apeldoorn en omstreken; het verschil met de landelijke uitslag is daar slechts 0.15%.

A–ESKWADRAAT

Schrijven voor de Vakidioot

Sophie Huiberts

Sinds kort is er een nieuwe achievement op de A–Eskwadraat website: Propellorhoedje.[1] Je krijgt deze achievement, wanneer je een stukje hebt geschreven dat in de Vakidioot wordt gepubliceerd.[2] Maar hoe doe je dat nou, een stukje schrijven voor dit mooie verenigingsblad?

(a) :(**(b)** :)

Om te beginnen moet je natuurlijk een **idee** hebben waarover je gaat schrijven. Heb je een bijzondere hobbie? Weet jij ergens meer over dan de gemiddelde A–Eskwadrater? Of schrijf je misschien graag iets studieinhoudelijks? Dan zit je goed. Weet je niks om over te schrijven? De Vakidiootredactie heeft altijd wel goede en minder goede ideeën voor artikelen. Je kunt ook proberen zelf iets te bedenken dat te maken heeft met het thema. Het thema is soort van geheim, dus je moet hiervoor wel een vakidioot lief aankijken. Een mail met een foto of tekening van een lief kijkend gezicht naar `vakidioot@a-eskwadraat.nl` werkt vermoedelijk ook, maar dat heeft nog nooit iemand geprobeerd.

> *„Soms zit het leven tegen, soms zit het mee, en mijn avond vakidiootartikelen schrijven pakte bijzonder positief uit."*
>
> – *Eva van Ammers*

Op een pagina in de Vakidioot passen ongeveer **500 woorden**. Mijn favoriete stukjes zijn meestal **tussen de twee en vier pagina's.** Daar past veel op, dus leef je uit!

Lezers kijken niet graag naar een muur van tekst, dus probeer dit te vermijden. In een vakinhoudelijke tekst kun je dit doen door gebruik te maken van alinea's, opsommingen, *theorem*omgevingen en *align*s. In een meer luchtige tekst kan je **plaatjes, pullquotes** en **infoboxes** in je artikel opnemen.

De paginaopmaak helemaal mooi maken kan de Vakidiootredactie voor je doen en we controleren alles goed op spelling. Als je liever zelf de opmaak van je artikel doet, dan helpen we je daar graag bij.

Heb je nog niet zo veel ervaring met schrijven? Geen probleem! Als je schrijven lastig vindt, ga dan voor een inhoudelijk artikel met een luchtige toon. Dat vind ik zelf het makkelijkst om te schrijven. Maak ook **grapjes die je zelf leuk vindt** en denk niet te veel na of ze dat voor je lezer ook zijn. Dat doe ik zelf ook altijd, en bevalt me erg goed. Succes met schrijven!

> Infoboxen zijn volgens Chun, die de VakidiootLaTeXklasse heeft gemaakt: „brightly colored boxes that may contain some fun anecdotes, explanation of basic concepts (which an author didn't include in his/her article), or something else entirely".

[1] Bedankt Webcie!
[2] Schrijf je een stukje met meerdere mensen? Er wordt maximaal één achievement per gepubliceerde pagina uitgedeeld.

Dichte ordeningen

Sven Bosman

Als je denkt aan het woord 'dicht', dan kan er van alles boven komen. Je kunt denken aan hoe onze grenzen er uit hadden gezien als Geert Wilders de verkiezingen had gewonnen, aan die vreselijke poëzieanalyse op de middelbare school, of natuurlijk aan hoe een zak chips er in mijn huis nou nooit uitziet. Maar als wiskundige, en specifiek als liefhebber van de wiskundige logica, denk ik dan toch vooral aan $\forall x \forall y(x < y \to \exists z(x < z \land z < y))$.

Een beetje opheldering is hier misschien op zijn plaats. De uitdrukking in de vorige alinea is het dichtheidsaxioma voor ordeningen. In woorden staat er: voor alle x en y geldt, als x kleiner is dan y, dan is er een z die tussen x en y in ligt. Dit is een eigenschap die de meeste ordeningen die we in het dagelijks leven tegenkomen hebben. Denk maar aan de reële getallen. Het is welbekend dat tussen iedere twee verschillende reële getallen weer een reëel getal ligt. Maar dit geldt ook al voor de rationale getallen, want als p en q twee verschillende rationale getallen zijn, dan is het gemiddelde van p en q een rationaal getal, en het ligt tussen p en q in. Daarnaast geldt ook al dat er tussen iedere twee verschillende reële getallen een rationaal getal ligt, dus de rationale getallen liggen ook nog eens dicht in de reële getallen.

Een ordening die niet aan het dichtheidsaxioma voldoet is $<$ op de gehele getallen. Er ligt namelijk geen enkel geheel getal tussen de getallen 0 en 1. Maar het grappige is dat we wel een dichte ordening kunnen definiëren op de gehele getallen! We weten namelijk dat er precies evenveel gehele getallen als rationale getallen zijn, er is een bijectie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Definieer nu de nieuwe ordening $<'$ op $\mathbb{Z}$ door te zeggen dat $a <' b$ precies als $f(a) < f(b)$, waar we de gebruikelijke ordening op de rationale getallen hebben genomen. Als we nu twee gehele getallen a en b pakken zodat $a <' b$, dan weten we dat $f(a) < f(b)$, en dus is er een $q \in \mathbb{Q}$ zodat $f(a) < q < f(b)$, dus $a <' f^{-1}(q) <' b$. Deze methode van het definiëren van een dichte ordening op een oneindige verzameling werkt voor iedere verzameling met een voor ons bekende kardinaliteit. Dus als een verzameling aftelbaar oneindig is, of bijvoorbeeld de kardinaliteit van $\mathbb{R}$ heeft. Maar kunnen we ook zo'n ordening definiëren als we de kardinaliteit van een oneindige verzameling niet weten? Het antwoord daarop blijkt 'ja' te zijn, maar het bewijs vereist een sterk wiskundig instrument, namelijk het lemma van Zorn.

Eerst even wat voorbereidende terminologie. Een verzameling P met een ordening $\leq$ noemen we een 'poset', of partieel geordende verzameling, als de ordening voldoet aan de volgende eigenschappen:

- **reflexiviteit** ($\forall x(x \leq x)$, dus ieder element is kleiner dan of gelijk aan zichzelf)
- **transitiviteit** ($\forall x, y, z(x \leq y \land y \leq z \to x \leq z)$, dus als x kleiner dan of gelijk aan y en y kleiner dan of gelijk aan z, dan ook x kleiner dan of gelijk aan z)
- **antisymmetrie** ($\forall x, y(x \leq y \land y \leq x \to x = y)$, dus als x kleiner dan of gelijk aan y en y kleiner dan of gelijk aan x, dan zijn x en y gelijk)

Merk op dat de ordening in een poset dus niet per se lineair is, dus het kan zo zijn dat er elementen p en q in een poset zijn die we niet met elkaar kunnen vergelijken, dus $p \leq q$

en $q \leq p$ zijn allebei niet geldig. Als $C \subseteq P$ en voor alle a en b in C geldt wel dat $a \leq b$ of $b \leq a$, dan noemen we C een 'keten' in P. Als $S \subseteq P$ en er is een $b \in P$ zodat voor alle $s \in S$ geldt dat $s \leq b$, dan noemen we b een 'bovengrens' voor S. Een element m in P heet een 'maximaal element' als er geen enkel element p in P zit dat ongelijk is aan m en zodat $m \leq p$.

Een voorbeeld is nu misschien op zijn plaats. Stel dat we als verzameling $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nemen, dus de verzameling van alle deelverzamelingen van de natuurlijke getallen, en we zeggen dat $A \leq B$ als $A \subseteq B$. Merk op dat dit een poset is (opgave voor de lezer om dit te bewijzen), en dat de ordening niet lineair is, want $\{1\} \not\subseteq \{2\}$ en $\{2\} \not\subseteq \{1\}$. We zien echter dat de verzameling $\{\{0\}, \{0,2\}, \{0,2,4\}, \ldots\}$ een keten is, met de verzameling even natuurlijke getallen als bovengrens. $\mathbb{N}$ zelf is een maximaal element in deze poset.

We zijn nu klaar om het lemma van Zorn te introduceren. Dit lemma zegt het volgende:

Lemma van Zorn: Stel dat P een poset is, en iedere keten in deze poset heeft een bovengrens in P, dan bevat P een maximaal element.

Het lemma van Zorn is een krachtig wiskundig hulpmiddel in heel veel vakgebieden van de wiskunde, van abstracte algebra tot functionaalanalyse. Voor een bewijs van het lemma zou je kunnen kijken in [1], het blijkt equivalent te zijn aan het zogenaamde keuzeaxioma. Wij gaan het nu gebruiken om de volgende stelling te bewijzen:

Stelling: Op elke oneindige verzameling X kunnen we een dichte lineaire ordening definiëren.
Bewijs: Zoals aangegeven gebruiken we het lemma van Zorn, maar daarvoor hebben we eerst een geschikte poset nodig. Bekijk daarvoor de poset van dichte lineaire ordeningen op deelverzamelingen van X. Dus bijvoorbeeld: als $A \subseteq X$ aftelbaar oneindig is, dan is de verzameling A met de ordening geïnduceerd door de rationale getallen (zie het voorbeeld dat we eerder gegeven hebben) een element van de poset. Als $A, B \subseteq X$ ordeningen $<_A$ en $<_B$ bevatten, dan zeggen we dat $A \leq B$ als geldt dat $A \subseteq B$ en voor alle $a, b \in A$ geldt: als $a <_A b$, dan $a <_B b$. Dus we beschouwen A als kleiner dan B als het een 'deelordening' van B is. Het is een mooie opgave voor de lezer om te bewijzen dat dit inderdaad een poset vormt. Om verwarring te voorkomen: we hebben nu dus inderdaad een ordening van ordeningen gemaakt, het is een beetje ordeningception.

Stel nu dat we een keten C in deze poset P hebben. Dan moeten we laten zien dat deze keten een bovengrens heeft in P. Bekijk daarvoor de vereniging V van alle elementen van C. Op deze verzameling kunnen we als volgt een ordening definiëren: als $a, b \in V$, dan moeten er verzamelingen $A, B \in C$ zijn zodat $a \in A$ en $b \in B$. Nu moet gelden dat $A \subseteq B$ of $B \subseteq A$, omdat C een keten is. Zeg nu zonder verlies van algemeenheid dat we in het eerste geval zitten, dan weten we dus dat $a, b \in B$, dus nu zeggen we gewoon dat $a <_V b$ precies als $a <_B b$. Deze ordening moet dicht zijn, want anders zit V niet in de poset P. Dus stel dat $a, b \in V$ met $a <_V b$. Met hetzelfde argument als net zien we dat er een $B \in C$ moet zijn zodat $a, b \in B$ en $a <_B b$. Omdat B een dichte ordening is, weten we nu dat er een $c \in B$ is zodat $a <_B c <_B b$, en dus geldt ook dat $c \in V$ en $a <_V c <_V b$. Dus deze ordening is inderdaad dicht.

Omdat iedere keten in de poset P een bovengrens in P heeft, volgt nu uit het lemma van Zorn dat P een maximaal element M bevat. Dit maximale element is dus een deelverzameling van X waar een lineaire ordening op gedefinieërd is. Nu gaan we dit element M gebruiken.

Stel ten eerste namelijk dat het complement van M in X oneindig is. Dan is er dus een aftelbaar oneindige verzameling $Y \subseteq X$ die volledig disjunct is van M. We hebben eerder gezien dat we op dit soort verzamelingen een dichte lineaire ordening kunnen definiëren door een bijectie met $\mathbb{Q}$ te gebruiken. Door dit nu te doen kunnen we Y en M samen nemen door te zeggen dat als $a, b \in Y \cup M$ dan $a < b$ precies als $a, b \in M$ of $a, b \in Y$ en onder de ordeningen die we al hadden geldt $a < b$, of als $a \in Y$ en $b \in M$. Dus we leggen M in zijn geheel bovenop Y zogezegd. We zien dat we nu weer een dichte lineaire ordening hebben gemaakt (opgave voor de lezer om dit te bewijzen), en dus was M helemaal geen maximaal element van P. Uit deze tegenspraak volgt dat het complement van M in X eindig moet zijn. Maar dat betekent dat er een bijectie moet zijn tussen M en X, want X was oneindig. Dus nu kunnen we met hetzelfde argument als eerder een dichte lineaire ordening op X definiëren, door gewoon de ordening te nemen die op M geldt en die ordening door de bijectie te gooien. Dus er volgt dat we op deze manier een dichte lineaire ordening op X gedefinieerd hebben, en dus is dit mogelijk op iedere verzameling. $\square$

En nu hoor ik jullie denken: poe poe, dat was me een rit om uit te zitten. Dat klopt, maar het is wel een bewijs dat vol zit met wiskundige geintjes, zoals het gebruiken van het lemma van Zorn, het definiëren van ordeningen op ordeningen, en handig spelen met bijecties. Als je meer wil weten over dit soort wiskunde, dan valt er nog veel meer te leren over (dichte) ordeningen en het lemma van Zorn. Je kunt het vak 'Grondslagen van de Wiskunde' volgen, of het dictaat [1] zelf eens bekijken. Of begin gewoon op de Wikipediapagina over 'dense linear orders', en klik eens rond. Er kan dan echt een wereld voor je *open* gaan over *dichte* ordeningen.

[1] J. van Oosten and I. Moerdijk, 2017
Sets, Models and Proofs
Dictaat van het vak 'Grondslagen van de Wiskunde'

Waarom de Westerschelde niet de Zuiderschelde heet

Bryan Brouwer

Een stiekeme hobby van mij is het kijken naar landkaarten. Met name wereldkaarten kunnen mij fascineren.[1] Maar ook het kijken naar de kaart van Nederland vind ik interessant. Toen ik laatst op zo'n kaart keek, viel mij iets op: de Westerschelde en de Oosterschelde liggen boven elkaar. De Westerschelde ligt namelijk ten zuiden van de Oosterschelde. Maar door hun namen zou je verwachten dat ze juist naast elkaar zouden liggen. Hierdoor doemden bij mij de volgende vragen op: waar komen de namen Westerschelde en Oosterschelde vandaan en waarom heten ze niet Zuiderschelde en Noorderschelde?

Het blijkt dat er twee verschillende theorieën over bestaan. De eerste theorie heeft te maken met de veranderde loop van de rivier de Schelde sinds de zestiende eeuw. Op een oude kaart uit 1573 is dit goed te zien. We zien dat de rivier de Schelde (komend uit het zuiden vanaf Antwerpen) zich splitst in twee takken. Eentje buigt naar het westen af; dit is de Westerschelde. Op het kaartje is deze aangegeven met de naam Honta. De ander gaat in eerste instantie oostwaarts om een eilandje heen, waar een plaatsje op ligt dat Agger heette. Dit is dan ook de naam die men vaak gebruikte voor deze rivier. De rivier verandert vrij snel van richting en buigt na het eiland af richting het westen. Dit werd bekend als de Oosterschelde.

Figuur 1 *Illustratie van de splitsing van de Schelde op een kaart uit 1573 met linksonder een ingezoomd gedeelte van de splitsing (aangegeven met de rode cirkel).*

De andere theorie, die ik persoonlijk een stuk aantrekkelijker vind, is dat men in vroeger tijden op een andere manier het noorden aangaf dan gebruikelijk is vandaag de dag. Dit was vooral zo in de kuststreken. De windrichtingen werden als volgt gedefinieerd: als je met

[1] Het is ook leuk om een historische timelapse van de menselijke geschiedenis te bekijken, waarbij je het opkomen en ondergaan van rijken kunt aanschouwen in enkele minuten. Dit overigens geheel terzijde.

het gezicht naar de zee stond dan keek je naar het noorden. Links keek je dan naar het westen en rechts naar het oosten en het zuiden was in je rug.

Het is mogelijk, maar niet helemaal zeker, dat dit gebruik is ontstaan aan de kusten tussen grofweg Vlieland en de Duitse kusten ten westen van Denemarken. Het is logisch dat de bovenstaande methode hier werd gebruikt, omdat de zee ook daadwerkelijk in het noorden ligt. Echter, aan de westkust van Nederland is dit natuurlijk niet het geval en kijk je, als je met je gezicht naar de zee staat, niet naar het noorden, maar naar het westen. Het resulteerde er dus wel in dat dat het noorden genoemd werd. In deze theorie is het dan ook niet geheel onlogisch dat de Noordzee de Noordzee heet.

Behalve dat we de naam van de Noordzee hier mee kunnen verklaren, kunnen we nu ook de naam van de Westerschelde en de Oosterschelde verklaren. Als we de kaart namelijk negentig graden draaien en de windrichtingen hernoemen[2], zoals beschreven, dan valt op dat de Westerschelde plotseling ten westen van de Oosterschelde ligt, precies zoals je zou verwachten. Behalve deze namen valt ook de voormalige naam van het IJsselmeer (Zuiderzee) met deze theorie goed te verklaren.

Figuur 2 *Illustratie van een gedraaide kaart uit de periode 1571-1584.*

De reden dat ik deze theorie aannemelijker vindt dan de eerste theorie die ik liet zien, is gebaseerd op het feit dat het dus ook de namen Noordzee en Zuiderzee verklaart. Maar dat is nog niet alles. Het blijkt namelijk dat er met deze theorie nog talloze andere geografische namen verklaard kunnen worden. Zo liggen er bijvoorbeeld in West-Friesland de plaatsen Westwoud, Midwoud en Oostwoud op één lijn van zuid naar noord. En in Den Haag en in Leiden voert het Noordeinde naar zee, terwijl in Den Haag het Westeinde ongeveer evenwijdig aan zee loopt. Behalve deze voorbeelden zijn er nog veel meer voorbeelden te vinden, hoewel er natuurlijk ook genoeg voorbeelden zijn waaruit blijkt dat men wél wist wat noord en zuid was.

[2] Ter verduidelijking: west wordt noord, zuid wordt west, oost wordt zuid en noord wordt oost.

Ezelsbruggetjes

Berend Ringeling en Tim Baanen

Waarom het kofschip het kofschip is

Er zitten heel goede taalkundige redenen achter de spelling van verleden tijden en voltooid deelwoorden, en ook goede taalkundige redenen achter het feit dat je een ezelsbruggetje als het kofschip nodig hebt om ze te onthouden.

Heel lang geleden had het Nederlands nog geen zwakke werkwoorden zoals ⟨leven⟩ of ⟨blaffen⟩, die een verleden tijd met ⟨-d⟩ of ⟨-t⟩ krijgen, zoals ⟨geleefd⟩ of ⟨geblaft⟩. Sterke werkwoorden zoals ⟨stelen⟩[1] veranderen van klinkers net als in het Proto-Indo-Europees, de verre voorouder van allerlei Europese en Indische talen, om verschillende vormen te produceren zoals ⟨gestolen⟩. Later is de zwakke vervoeging ontstaan door werkwoorden te ondersteunen met een vorm van ⟨doen⟩, dat in de loop der jaren is afgesleten tot een achtervoegsel ⟨-d⟩.

Bij deze slijtage hadden de klanken van het werkwoord zelf ook invloed op de uitgang. Onbewust gingen sprekers in de buurt van stemloze klanken ook de uitgang ⟨-d⟩ stemloos maken, wat die andere mogelijkheid ⟨-t⟩ produceerde. Niet geheel ontoevallig zijn de stemloze klanken van het Nederlands de /t/, /k/, /f/, /s/, /x/ en de /p/: precies de medeklinkers in het kofschip (in het fonetisch alfabet /ət ˈkɔfsxɪp/).[2] Zo is dus de regel achter het kofschip ontstaan.

Zo zien een kofschip, fokschaap en xtc-koffieshop er dus uit.

Maar de Nederlanders maakten het daarna iets te makkelijk voor zichzelf in de uitspraak: elke stemhebbende klank werd stemloos aan het einde van een woord, zodat bijvoorbeeld ⟨huis⟩ met een stemloze /s/ het enkelvoud werd van ⟨huizen⟩ met een stemhebbende /z/. Dit gebeurde ook met de laatste klank van werkwoorden, zodat tegenwoordig ⟨geleefd⟩ en ⟨geblaft⟩ allebei met /ft/ eindigen. Hierdoor kun je niet meer aan de uitspraak zien hoe je het zou moeten spellen, zodat een of ander ezelsbruggetje nodig is.

[1] Volgens sommige leden van mijn familie ook ⟨merken⟩.
[2] Als je vindt dat de /ʃ/ meetelt, is er bijvoorbeeld het ezelsbruggetje met ⟨xtc-koffieshops⟩.

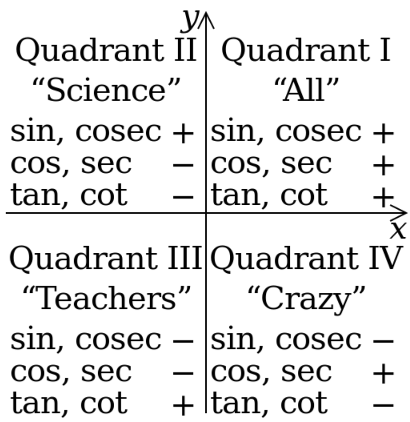
Ezelsbruggen bij goniometrie

Op school wordt vaak gebruikgemaakt van ezelsbruggen, zoals de 'TV-TAS' om de waddeneilanden te herinneren. Binnen de goniometrie is de 'SOH-CAH-TOA' (ook wel 'SOL-CAL-TOA' of 'SOS-CAS-TOA')[3] het meest bekend.

Deze 'regel' drukt goniometrische functies uit in de verhoudingen binnen een rechthoekige driehoek. Scholieren kunnen dit vervolgens gebruiken om de hoeken van een rechthoekige driehoek te berekenen als er twee zijden bekend zijn.

Sommige scholieren moeten nog verder kijken dan de sinus en cosinus en moeten ook nog de cosecant, secant en cotangent kennen[4]. Het hiermee corresponderende ezelsbruggetje is 'AOT-HAS-HOC', waarbij de aanduiding van de goniometrische functies als laatste komt.

In het onderstaande plaatje is nog een leuk ezelsbruggetje te zien: '**All** **S**cience **T**eachers (are) **C**razy'. Dit gaat over het teken van de goniometrische functie op de eenheidscirkel in de verschillende kwadranten (het ezelsbruggetje begint in het eerste kwadrant en moet tegen de klok in worden ingevuld). De '**All**' betekent dat iedere goniometrische functie positieve waarden heeft in het eerste kwadrant (voor hoeken tussen 0 en 90 graden). Verder geeft de eerste letter van de woorden Science, Teachers en Crazy aan welke goniometrische functie(s) positief zijn in het bijbehorende kwadrant. Zo is bij het derde kwadrant (bij het woord '**T**eachers') alleen de tangens en de bijbehorende 'omgekeerde' de cotangens positief.



Ik vraag me af hoeveel mensen daadwerkelijk dit ezelsbruggetje gebruiken. Het lijkt me dat als de vorm van de sinus- en cosinusgrafiek bekend is, dat dan zonder enige moeite de vorm van de andere grafieken kan worden afgeleid. Het lijkt alsof hierdoor het herinneren van de ezelsbrug lastiger wordt dan hetgeen dat herinnerd moet worden.

[3]Afhankelijk of men voor de langste zijde in een rechthoekige driehoek het woord hypothenuse, lange of schuine gebruikt.
[4]Dit zijn de omgekeerden van de sinus, cosinus en tangens

Sonnet

Eva van Ammers

Er zijn vele vormen van gedichten. Een ballade, een limerick, een elfje. Maar toch wel de bekendste dichtvorm door de jaren heen is het sonnet[1].

Een sonnet is een gedicht dat bestaat uit veertien regels, waarbij de eerste acht regels het octaaf heten, bestaande uit twee kwatrijnen, en de laatste zes regels een sextet, bestaande uit twee terzinen. De eerste acht regels zijn bedoeld om een beeld te schetsen, een soort opbouw te geven. De volgende zes regels hebben vaak een andere functie. Deze kunnen een tegenstelling aangeven, een conclusie, of iets anders met het beeld doen dat in de eerste acht regels is geschetst.

Meestal is er daarnaast sprake van een volta, een wending in het gedicht. Deze geeft iets onverwachts aan, het gedicht gaat een andere kant op. Hier is een mooi gedicht van Geert Zomer om dit te illustreren, maar met vrouwelijke voornaamwoorden omdat ik dat leuker vind:

De sonnettenschrijver

Zij wilde graag sonnetten schrijven,
woorden schikken in een klassieke vorm.
Zinnen die bij hun lezers zouden beklijven,
ze wikken en wegen volgens de norm.

Maar het liefst wilde zij lekkere wijven,
om te beminnen, in Harderwijk of Benidorm.
Zij zocht ze op stranden, die naakte lijven,
om ze desnoods te verdoven met chloroform.

Zij was niet bij machte er één te versieren.
Een heerlijke snol of lekkere del?
Zij wist het telkens te verstieren.

Floor, Sandra, Annabel, Pia of Nel,
ze wezen haar af, die vervelende klieren.
Maar sonnetten schrijven, dat lukte haar wel!

In dit sonnet zitten vele wendingen. Na het eerste kwatrijn vindt er bijvoorbeeld al een wending plaats, omdat de schrijfster plotseling haar niet alleen interesseert in sonnetten schrijven, maar ook in vrouwen versieren. Maar na het tweede kwatrijn zit ook een duidelijke wending plaast, want terwijl in het octaaf een beeld wordt geschetst van wat de schrijfster wil, geeft het sextet aan dat toch niet alles wil lukken.

Eén van de laatste dingen die belangrijk is bij een sonnet, is het metrum. Het metrum is het patroon van lange en korte lettergrepen. Het belangrijkste om te houden bij het metrum in het Nederlands, is dat klanken die worden uitgesproken als *uh* vaak kort zijn, dus de *e* op

[1] https://nl.wikipedia.org/wiki/Sonnet

het einde van werkwoorden, de *ee* in een of de *ij* in woorden die eindigen op *lijk*. Verder zijn lettergrepen met meerdere klinkers, zoals *ou* of *oo*, vaak lang, maar dit hoeft niet altijd.

Een bekende vorm van metrum die ook in veel Nederlandse sonnetten wordt gebruikt, is de jambe. Een jambe bestaat uit eerst een korte, en dan een lange lettergreep. In het gedicht van Geert Zomer is het metrum minder strak terug te vinden, maar gelukkig kon ik in mijn eigen archieven nog een sonnet vinden dat grotendeels bestaat uit jamben:

Geluk

Een boom met vruchten van geluk
Waarvan ik eerst de laagsten pluk
Daar ben ik nu eens in geklommen
Omdat daar gouden appels glommen

En nu snijd ik mij continu
Maar 'k voel me als individu
Veel sterker dan zo laag benee
En vul mij met de vrucht waarmee

'k Beneden niet verzadigd werd
Vul ik mij nu slechts met één erwt
Bevredigend het resultaat
En doet teniet wat was zo kwaad
Om mij toen in de weg te staan
Om naar die gouden vrucht te gaan

Wat je misschien wel op zal vallen aan dit gedicht, is dat er soms op het einde een extra korte lettergreep is. Dit kan een leuke afwisseling geven in het gedicht, mits de rest wel netjes binnen het metrum blijft passen, anders kan het wel storend worden. Als je in dit gedicht je lange en korte lettergrepen zou scanderen, zou het je op kunnen vallen dat er op een bepaald moment sprake is van een antimetrie, een wisseling van het regelmatige metrum. Kan je deze vinden? Hint: de plek komt ongeveer overeen met de wending.

NATUURKUNDE

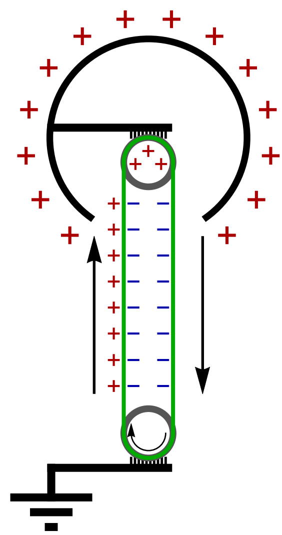
De Van de Graaff-generator

Peter Speets en Michał van Hooft

De Van de Graaff-generator[1] is vernoemd naar Robert van de Graaff. In de jaren ’20 ontwierp hij de generator om een sterk elektrisch veld te creëren om geladen deeltjes te kunnen versnellen. Tegenwoordig worden kleinere Van de Graaff-generatoren gebruikt om de schokkende werking van statische elektriciteit te demonstreren.

De Van de Graaff-generator is een holle metalen bol die geladen kan worden door transport van lading met een lopende band. Door deze methode te gebruiken kan de lading langzaam opgebouwd worden en kan er een grote spanning bereikt worden zonder te hoeven beschikken over een andere hoogspanningsbron. De Van de Graaff-generator die rond 1931 door Van de Graaff zelf gebouwd was, kon een spanning bereiken van 1,5 miljoen volt. Van de Graaff had de generator ontworpen als deeltjesversneller. Hiervoor worden twee Van de Graaf-generatoren met tegengestelde lading tegenover elkaar gezet; zo kon een groot spanningsverschil worden gemaakt waarmee ionen, geladen atomen, versneld konden worden.

De manier waarop lading op de lopende band gebracht wordt, is vergelijkbaar met het experiment met een glazen staafje dat opgewreven kan worden met een zijden doek. Door met de doek over het staafje te wrijven, wordt het staafje elektrisch geladen. Dit heet het tribo-elektrisch effect. Door dit geladen staafje tegen een metalen bol te houden, wordt de lading verdeeld over het staafje en de bol. Door het staafje steeds weer te laden door er met de doek overheen te wrijven, kun je de bol een steeds grotere lading geven, totdat de bol dezelfde lading heeft als je het staafje kunt geven door te wrijven met het doek.



Figuur 1 *Schets van een van de Graaff generator.*

Om de bol sneller op te laden, kun je het wat industrieëler aanpakken: neem in plaats van een staafje een band, bijvoorbeeld van rubber, en laat die over twee rollers lopen waarvan één van de rollers gemaakt is van een materiaal dat, net zoals het doek, de band een lading kan geven. Het rollen heeft in dit geval hetzelfde effect als wrijven met een doek. In het schema hiernaast wordt de bovenste roller positief geladen en de binnenkant van de band negatief door hetzelfde tribo-elektrische effect als hierboven beschreven is. Als de negatief geladen band bij de onderste roller komt, wordt de buitenkant van de band positief geladen door elektroden aan de buitenkant van de band die met de aarde zijn verbonden. Omdat de band geen stroom geleidt, wordt de buitenkant van de band positief geladen en blijft de binnenkant negatief geladen. Wanneer de band weer terug omhoog gaat, is de totale lading nul, maar is deze wel gepolariseerd tussen de binnenkant en de buitenkant van de band.

[1] Ook wel *vandegraaffgenerator*

Dit proces zorgt ervoor dat de bovenste roller altijd een positieve lading blijft houden. Deze lading wordt gevoeld door elektronen op de elektrode die boven de bovenste roller is geplaatst. Elektronen worden door de positieve lading van de bovenste roller aangetrokken en komen vervolgens op de buitenkant van de band terecht, waardoor de buitenkant van de band neutraal geladen wordt, terwijl de binnenkant van de band negatief geladen blijft. Op deze manier worden er steeds elektronen van de bol naar beneden gebracht. Dit proces kan worden omgedraaid door de rollers om te wisselen. In dat geval wordt de bol negatief geladen.

Dit proces kan zo door blijven gaan, ondanks de steeds grotere positieve lading op de bol. De positieve lading op de bovenste elektrode stoot zichzelf af en gaat zich daarom gelijkmatig op het oppervlak van de bol verdelen. Deze ladingsverdeling maakt het elektrisch veld binnenin de bol nul, omdat ieder stukje van de bol een even grote afstotende werking heeft. De positieve lading op de bovenste elektrode kan dus ook naar het boloppervlak bewegen, zonder te worden afgestoten. Daarom kan een holle metalen bol ook evenveel lading bevatten als een dichte bol, omdat alle lading op het oppervlak zit.

Hoewel de band een grote lading op de bol kan brengen, lekt er ook lading weg. Als het elektrisch veld rond de bol groot genoeg is, kunnen elektronen uit de luchtmoleculen worden getrokken. Het geïoniseerde gas kan elektriciteit geleiden waardoor de bol weer leegloopt. Voor grote bollen duurt het langer voordat dit proces ontstaat. Daarom kunnen grote Van de Graaff-generatoren een grotere spanning opbouwen. De geïoniseerde lucht kan reageren met andere luchtmoleculen. Bij corona-ontlading kunnen er ozon- of stikstofoxiden ontstaan uit geïoniseerde zuurstof- en stikstofmoleculen. De ozon is bij ontladingen soms te ruiken.

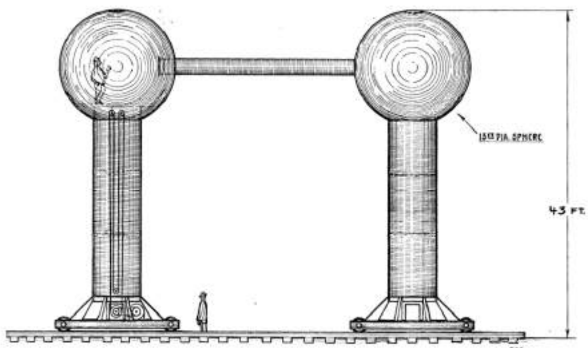


FIG. 4.

Figuur 2 *Schets van Van de Graaf zelf van de Van de Graaff-generator uit een paper van Van de Graaf uit 1933 waarin de Van de Graaf-generator als deeltjesversneller is gebruikt. Twee van de Graaff-generatoren met verschillende ladingen staan tegenover elkaar om een sterk elektrisch veld te genereren.*

WISKUNDE

Vreemde niet-Hausdorffse ruimten

Jim Vollebregt

Wist je dat de rij

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R},\ a_n = n^5 + \sin(n)$$

convergeert? En dat deze rij ook nog eens convergeert naar elk geheel getal? Tenminste, als we de juiste topologie kiezen. Laten we maar eens kijken hoe dat in zijn werk gaat.

Allereerst is het wel handig om helder te hebben wat een topologie is.

Definitie 1. Zij X een verzameling. Een collectie $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heet een *topologie* op X als aan de volgende voorwaarden is voldaan:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
2. Als $U, V \in \mathcal{T}$, dan $U \cap V \in \mathcal{T}$,
3. Elke vereniging van elementen in $\mathcal{T}$ is weer een element van $\mathcal{T}$.

Een deelverzameling $V \subseteq X$ heet *open* als $V \in \mathcal{T}$. Met een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ bedoelen we een verzameling X met bijbehorende topologie $\mathcal{T}$. Een goed voorbeeld van een topologische ruimte is $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{eucl}})$, waar $\mathcal{T}_{\text{eucl}}$ de topologie is die alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ bevat die open zijn volgens de Euclidische metriek. Deze regels geven ons best wat vrijheid bij het kiezen van onze open verzamelingen. We hebben echter nog een aantal definities nodig voor we kunnen laten zien dat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ inderdaad een convergente rij is.

Definitie 2. Laat $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte zijn, en laat $x \in X$. Met een omgeving van x bedoelen we een deelverzameling $N \subseteq X$ zodat er een open $V \subseteq N$ bestaat met $x \in V$. Verder hebben we $\mathcal{N}(x) := \{N \subseteq X \mid N \textit{ is een omgeving van } x\}$.

Definitie 3. Laat $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte zijn, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in X en $x \in X$. Dan zeggen we $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ als voor alle omgevingen $N \in \mathcal{N}(x)$ er een getal M is zodanig dat voor alle $n > M$ geldt dat $x_n \in N$.

Definitie 4. Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ heet *Hausdorff* als voor alle $x \neq y \in X$ er een $N_1 \in \mathcal{N}(x)$ en $N_2 \in \mathcal{N}(y)$ zijn, zodat $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Dit geeft ons dus de mogelijkheid om punten in een verzameling te scheiden met open verzamelingen.

Definitie 5. Laat X een verzameling. Een collectie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heet een *topologiebasis* op X als:

1. Voor alle $x \in X$ is er een $B \in \mathcal{B}$ met $x \in B$, oftewel $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$;
2. Als $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ dan is er voor alle $x \in B_1 \cap B_2$ een $B \in \mathcal{B}$ zodat $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Hebben we een topologiebasis, dan kunnen we spreken over de geïnduceerde topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B})$. Dit is de grofste topologie $\mathcal{T}$ op X zodat $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B})$. Dat wil zeggen, als $\mathcal{T}$ een topologie is met $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, dan geldt $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{T}$.

We hebben nu alle benodigde middelen om $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ te laten convergeren naar elk willekeurig geheel getal. Zij $k \in \mathbb{N}$ en definieer $\mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ als de collectie die bestaat uit $\mathbb{R}$ en alle intervallen (a, b) die hoogstens k gehele getallen bevatten (Voor $k = 0$ betekent dit dat $\mathcal{B}_0$ bestaat uit $\mathbb{R}$ en de intervallen (a, b) die *geen* gehele getallen bevatten).

Lemma 1. Elke $\mathcal{B}_k$ is een topologiebasis op $\mathbb{R}$.

Bewijs. Het is triviaal dat $\mathbb{R} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_k} B$, aangezien $\mathbb{R} \in \mathcal{B}_k$. Laat $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_k$ met $B_1 = (a, b)$, $B_2 = (c, d)$. Als $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ zijn we meteen klaar, dus nemen we aan dat $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Neem $x \in B_1 \cap B_2$ willekeurig. Dan is er een basiselement $B_3 := (max\{a, c\}, min\{b, d\}) \subset B_1 \cap B_2$ met $x \in B_3$. Maar aangezien zowel B_1 als B_2 hooguit k gehele getallen bevatten, bevat B_3 ook hooguit k gehele getallen, dus $B_3 \in \mathcal{B}_k$. We hebben dus dat x een element is van een basisopen in de doorsnede van B_1 en B_2. Hiermee hebben we beide vereisten voor een topologiebasis aangetoond. □

We bekijken nu $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}(\mathcal{B}_0)$, de topologie die wordt geïnduceerd door $\mathcal{B}_0$. Uit de manier waarop we $\mathcal{T}_0$ hebben geconstrueerd, volgt dat voor alle gehele getallen z met $z \in V \in \mathcal{T}_0$ geldt $V = \mathbb{R}$, aangezien $\mathcal{T}_0$ verder alleen bestaat uit verenigingen van intervallen die geen gehele getallen bevatten.[1]

Lemma 2. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$ is geen Hausdorffse ruimte.

Bewijs. Neem $x, y \in \mathbb{R}$ geheel, met $x \neq y$. Dan volgt $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y) = \{\mathbb{R}\}$. Stel dat $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$ *wel* Hausdorff is, dan zijn er $N_1 \in \mathcal{N}(x)$ en $N_2 \in \mathcal{N}(y)$ zodat $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, tegenspraak. We concluderen dat $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$ niet Hausdorff is. □

We kunnen nu de volgende stelling bewijzen:

Stelling. De rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, gegeven door $a_n = n^5 + \sin(n)$ is in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$ convergent naar elk geheel getal.

Bewijs. Neem $x \in \mathbb{Z}$ willekeurig. We willen aantonen dat $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. Omdat $x \in \mathbb{Z}$ geldt $\mathcal{N}(x) = \{\mathcal{R}\}$. Neem $M = 0$, dan geldt voor alle $n > M$ $a_n \in \mathbb{R}$. We hebben dus aangetoond dat voor alle $x \in \mathbb{Z}$ en elke omgeving $N \in \mathcal{N}(x)$ geldt voor alle $n > 0$ dat $a_n \in N$. Dit is equivalent met $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. □

We zien dus dat niet-Hausdorffse ruimten best wel vreemd kunnen zijn, maar ook best wel grappig.

[1] Als je de behoefte voelt kun je dit nagaan of je kunt het aannemen.

ASML: Be part of Progress

Tegenwoordig kan een USB stick van slechts tien euro wel 16 GB data bevatten. In ziekenhuizen kan een camera ter grootte van een pil worden ingeslikt om een patiënt te onderzoeken. Moderne pacemakers, belangrijke apparaten die abnormale hartritmes onder controle houden, zijn nu meer dan een tiende kleiner dan vroegere versies. En in oceanen worden via kleine GPS zenders bedreigde schildpadden gevolgd om ze te beschermen. Hoewel elk van deze apparaten ongelooflijk klein is, representeren zij een grote mijlpaal in technologische vooruitgang. In het hart van elk van deze levens verbeterende innovaties zit een microchip – een klein pakketje van geïntegreerde schakelingen, dat de werking van het apparaat aandrijft. In een wereld met grote doorbraken wordt er constant gestreefd naar het produceren van microchips die kleiner, sneller, effectiever en goedkoper zijn. Eén van de grote hightech spelers die hierbij voorop loopt, is ASML, een producent van lithografiesystemen voor de productie van computerchips.

Cruciale stap

ASML, gevestigd in Veldhoven, ontwikkelt, produceert en levert machines aan de belangrijkste microchipproducenten ter wereld; zoals Samsung, Intel en TSMC. De productie van een chip bestaat uit tientallen stappen. ASML richt zich slechts één van deze stappen, maar het is wel een cruciale stap: lithografie. Bij lithografie gaat het om het blootstellen en chemisch etsen van de wafers die gebruikt worden om de chip te 'printen'. Met gebruik van de nieuwste generatie ASML machines, is het mogelijk om chip structuren te printen die slechts zo'n 20 nm breed zijn. Om dit in perspectief te plaatsen… dat is hetzelfde als een roman van 500 pagina's printen op een mensenhaar van 1 cm lang!

> ***"Om voorop te blijven lopen is ASML altijd op zoek naar mensen die nooit opgeven. Mensen die houden van wat zij doen – niet omdat het eenvoudig is, maar omdat het moeilijk is."***

Kansen om deel uit te maken van vooruitgang

Om voorop te blijven lopen in de race naar kleinere, snellere, goedkopere chips, is ASML altijd op zoek naar mensen die nooit opgeven. Mensen die houden van wat zij doen – niet omdat het eenvoudig is, maar omdat het moeilijk is. Mensen die het beste idee willen vinden, de beste oplossing, de beste weg voorwaarts. De meer dan 16.000 werknemers van ASML behoren tot de meest creatieve denkers in de wereld van de natuurkunde, wiskunde, chemie, mechatronica, optica en informatica. En omdat ASML jaarlijks meer dan een miljard investeert in Research en Development, hebben deze experts alle middelen voorhanden om vooruitgang naar het extreme te tillen. Dat is de enige manier waarop ASML zijn voorsprong kan behouden – wereldwijd.

Een plek om te leren

ASML is een ideale omgeving voor professionele groei en ontwikkeling. Het bedrijf biedt een bevredigende carrière, niet gewoon een baan. ASML beloont werknemers competitief en biedt coaching, training en persoonlijke carrièreontwikkeling. Flexibiliteit, enthousiasme, ambitie en klantgerichtheid vormen de basis voor een wereld van mogelijkheden. Om je mogelijkheden te ontdekken, bezoek je `www.workingatasml.com`

PUZZEL

Een gezonde afweging

Marc Houben

Je hebt in een heel speciale winkel een magische™ weegschaal (zoals in de figuur hieronder) gekocht: als je op de schalen van de weegschaal gewichten legt, zal de weegschaal op de schaal waarop het minste gewicht ligt een nieuw magisch™ gewicht toveren, zodanig dat de weegschaal in balans komt. Bijvoorbeeld: als je een normaal gewicht van 2 gram op de linkerschaal legt en een normaal gewicht van 5 gram op de rechterschaal, dan zal op de linkerschaal een magisch™ gewicht van 3 gram verschijnen. Maar pas op: als je een magisch™ gewicht op de weegschaal legt, dan wordt de weegschaal boos en verliest hij zijn magische™ krachten (dit wil je dus niet doen).

Figuur 1 *Een magische weegschaal*

Bij een heel normale winkel verkopen ze normale gewichten van k gram voor elk positief geheel getal k. De vraag is nu: hoeveel normale gewichten moet je kopen, zodanig dat je alle 100 magische™ gewichten van $1, 4, 9, 16, \cdots, 99^2, 100^2$ gram kunt maken?

Stuur als oplossing een zo klein mogelijke verzameling getallen (die de waarden van de normale gewichten in gram uitdrukken) naar `vakidioot@a-eskwadraat.nl`, het liefst met een uitleg hoe je hiermee de magische™ gewichten kan maken.

De correcte inzenders van de Figuuruur puzzel (uit vakidioot nummer 3: "Figuur") zijn: Ludo Pulles, Midas Schonewille, Brizia de Bruin, Youri Bok, Marien Raat. De willekeurig geselecteerde winnaar is geworden: Youri Bok. Gefeliciteerd! Hij mag een prijsje ophalen bij de A–Eskwadraatkamer.

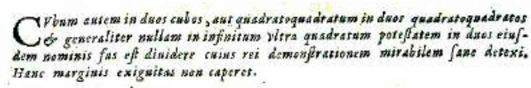
WISKUNDE

Bewijzen zonder het te verklappen

Tim Baanen

Bij Inleiding Analyse leggen ze het idee van de epsilon-deltabewijzen uit aan de hand van een spelletje. Als je beweert dat een functie f continu is in het punt x, dan ga ik een getal $\epsilon > 0$ noemen, en je wint de ronde als je een $\delta > 0$ opnoemt zodat $|y - x| < \delta$ impliceert $|f(y) - f(x)| < \epsilon$. Als je een strategie hebt om alle rondes te winnen, heb je een bewijs gevonden dat f inderdaad continu is.[1] Om ook voor anderen te bewijzen dat f continu is, dus dat je kan winnen, moet je wel je strategie openbaar maken.

In het echte leven is het soms best wel handig om geheimen te hebben. Op zijn minst moet je dingen als een pincode en wachtwoord veilig bewaren, want daarmee kun je bewijzen dat jij jezelf bent en niet iemand anders. Dit soort *authenticatie* op basis van een geheim dat alleen jij kent is de hoeksteen van zo'n beetje alle digitale communicatie. Met alleen wachtwoorden kom je alleen niet ver: als je een wachtwoord hebt voor je bankrekening, moet je aantonen dat jij dat wachtwoord hebt door het op te sturen naar de bank. Maar je wilt natuurlijk niet je wachtwoord aan iedereen vertellen, dus eerst moet de bank bewijzen dat zij het zijn en niet een of andere oplichter. Als ze dat ook met een wachtwoord willen doen, schiet het hele proces geen moer op.


Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Figuur 1 *Of je houdt je strategie geheim door te beweren dat de marge te klein is om die te bevatten.*

Daarom zijn er systemen bedacht waar je kan bewijzen dat je iets weet, zonder dat de controleur erachter komt wat je precies weet. Dit is bijvoorbeeld het idee achter de certificaten waarmee websites beveiligd worden. Zo ben ik de enige die de priemfactorisatie van het getal 24 674 926 461 055 456 938 810 420 957 032 367 817 770 086545 680 212901 445 683971 043 803[illegible] kent. Met wat getaltheorie kan iedereen die mijn website bezoekt controleren dat dat inderdaad zo is, en dus dat mijn website echt van mij is, zonder de factorisatie zelf te hoeven weten.

Drie kleuren geheim houden

Dit idee kun je uitwerken tot een *nulkennisbewijs* (of als je liever Engelse woorden leest, *zero knowledge proof*): je bewijst dat je een geheim weet, maar je verklapt het geheim niet.[2] Vaak is hetgene wat je weet een oplossing voor een of ander Moeilijk Probleem in de informatica, waarvan op dit moment mijn favoriete voorbeeld het *driekleuren* van een landkaart is.

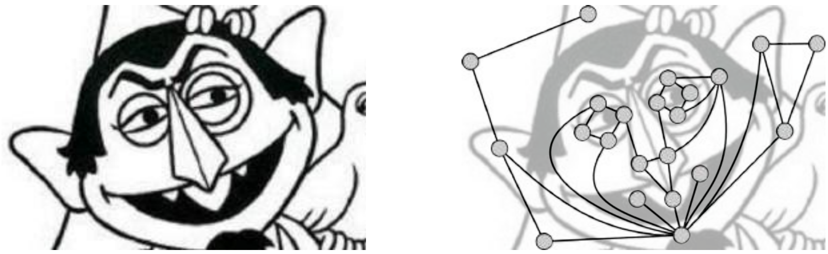
De vierkleurenstelling zegt dat je hooguit vier kleuren nodig hebt om een landkaart in te kleuren zodat aangrenzende landen verschillende kleuren krijgen, en werd in 1976 bewezen door een computer alle overgebleven gevallen te laten checken. Het blijkt dat beslissen of een landkaart ook met drie kleuren ingekleurd kan worden, echt best wel lastig is.[3] Maar dat

[1] **DOE-TIP**: is elk bewijs van continuïteit ook meteen te vertalen naar een winnende strategie van dit spel?

[2] Stiekem voldoet het certificatensysteem achter websites niet aan de precieze definitie, maar het geeft wel een mooi voorbeeld.

[3] Oftewel $\mathcal{NP}$-volledig.

is juist handig: als je een driekleuring voor een kaart hebt gevonden, gaat iemand anders er niet zomaar zelf opkomen.



Figuur 2 *Wiskundigen werken liever met een graaf dan een kaart, door gebieden te vervangen met punten en grenzen met lijnen.*

Stel nu dat je beweert voor een gegeven graaf een driekleuring gevonden te hebben, dan kun je iemand anders als volgt ervan overtuigen, zonder te verklappen hoe je die graaf precies hebt ingekleurd: verkrijg een of andere grote ruimte waar alleen jij naar binnen mag, en teken daar op de grond de grenzen in. Kies nu willekeurig een permutatie van de drie kleuren waarmee je gekleurd hebt, en leg op elk gebied de gepermuteerde kleur uit je driekleuring. Verberg elk fiche door een hoedje erop te zetten, en laat je checker naar binnen. Diegene mag dan twee aangrenzende gebieden kiezen en de hoedjes eraf halen. Als je echt een driekleuring hebt, zullen de kleuren altijd verschillend zijn.

Figuur 3 *In de eerste ronde bleken de kleuren verschillend te zijn, dus nog een paar honderd checks te gaan...*

Je zou uiteraard gewoon geluk kunnen hebben, dus we kunnen dit herhalen: nadat de checker verdwenen is, permuteer je alle kleuren weer willekeurig, zet je alle hoedjes terug en laat je die weer binnenkomen om twee hoedjes te verwijderen. Herhaal dit proces van permuteren, hoedjes terugzetten en checken tot je de checker overtuigd hebt dat dit echt niet meer toeval is. Op een bepaald moment is de kans natuurlijk heel klein dat je met een foute driekleuring elke keer geluk hebt.[4]

Je mag niet valsspelen

Uiteraard hoeft dit niet allemaal zo netjes te verlopen als ik hier beschrijf. Het zou best kunnen dat een van jullie (of jullie allebei) de boel proberen op te lichten. Daarom moeten we eerst controleren dat er geen valsspeelmogelijkheden zijn.

Ten eerste zou je kunnen proberen om geen echte driekleuring te hoeven hebben door zo iedere ronde een zo goed mogelijke benadering te maken en de grenzen waar je niet uitkomt dan maar dezelfde kleur te geven. Als dit geen echte driekleuring is, moeten er dus

[4]**DOE-TIP**: bepaal hoe vaak jullie dit proces moeten herhalen tot het overtuigend is.

aangrenzende gebieden zijn met dezelfde kleur. De checker kan hier elke ronde met een bepaalde kans achterkomen.

De andere manier om vals te spelen is door gewoon meer dan drie kleuren te gebruiken. Het is al bewezen dat het kan met vier, dus je permuteert allevier de kleuren mee in elke ronde. Om dit op te sporen kan de checker bijhouden hoeveel kleuren er al zijn langsgekomen. Omdat de checker elke ronde vrij mag kiezen, is er weer een bepaalde kans dat in een ronde de vierde kleur langskomt.

In allebei de gevallen zul je na genoeg ronden vrijwel zeker door de mand vallen, zodat de checker na verloop van tijd echt mag concluderen dat je het goed hebt gedaan.

De checker mag niet afkijken

Andersom kan jij helemaal eerlijk zijn en de checker aan het proberen zijn toch dingen te weten te komen. De manier waarop we meten of de checker daadwerkelijk iets leert van het proces is door te kijken of die het hele proces niet gewoon kan nadoen zonder iets af te weten van de driekleuring. In dat geval kan de checker net zo goed het bewijsproces zelf uitvoeren, waar die helemaal niets uit kan leren.

Elke ronde noemt de checker twee aaneengrenzende gebieden en krijgt twee verschillende kleuren te zien. Omdat de kleuren elke ronde willekeurig gepermuteerd zijn, zijn ze tussen opeenvolgende rondes helemaal onafhankelijk, zelfs als de checker dezelfde gebieden noemt. Dat betekent dat de checker net zo goed twee gebieden kan kiezen en de twee verschillende kleuren willekeurig kan kiezen. Door het proces te doorlopen komt de checker dus helemaal niets te weten.

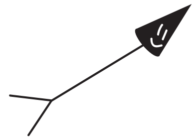
Ten slotte kan de checker ook niemand anders overtuigen, zelfs als die mag meekijken bij het hele proces. Als een omstander toekijkt bij het optillen van de twee hoedjes, zal die inderdaad steeds verschillende kleuren zien, maar het zou net zo goed kunnen dat jij en de checker onder een hoedje spelen, en jij de checker van tevoren al hebt ingelicht waar de fout in de driekleuring zit. Het enige gevolg van het hele proces is dus dat alleen de checker nu ook weet dat jij een driekleuring hebt.

Andere bewijsstrategieën

Hier hebben we eigenlijk de drie onderdelen van een nulkennisbewijs gecontroleerd: het moet *volledig* zijn, dat je het daadwerkelijk kan laten zien als je het weet; het moet *geldig* zijn, dat het onhaalbaar is de checker te misleiden; en het moet *kennisloos* zijn, dat alleen de checker te weten komt dat jij de driekleuring hebt. Er zijn nog veel andere lastige problemen waarvan je de oplossingen op zo'n nulkennismanier kunt aantonen, en zelfs systemen waar je niet eens een heel erg lastig probleem hoeft op te lossen om aan een geheim te komen.

Je zou nu natuurlijk kunnen gaan klagen dat het geen echte bewijzen zijn, want het zou door stom toeval alsnog als gevolg kunnen hebben dat de checker iets accepteert wat helemaal niet waar is. Aan de andere kant zou het ook zo kunnen zijn dat je het geheim helemaal niet weet en door stom toeval een willekeurige gok de juiste blijkt te zijn. Door de geheimen lastig genoeg te maken en door lang genoeg door te vragen wordt deze kans zo klein dat dat in de praktijk niet uitmaakt.

De fotostrip



Een nieuwe aflevering van: Hector de Vector[1]

[1] Zie ook Vakidioten 1314-6 Verschil en 1415-5 Veld