

WAKWIOOT

Wiskundig Wandelen

Ik neem je mee

Met relativiteit kom je op tijd

SpazMIERgang

Route

Studievereniging
A-Eskwadraat

06- 25

In dit nummer

	Van de voorzitter	4
	<i>Quirijn Kokkeler</i>	
	Hoeveel wegen leiden er nou <i>echt</i> naar Rome?	5
	<i>Margo van Assenbergh</i>	
	Wiskundig wandelen	8
	<i>Kevin van Dijk</i>	
	'Vind de route'-sudoku	10
	<i>Lara Timmers</i>	
	Met relativiteit kom je op tijd	11
	<i>Yoram Veltmaat</i>	
	De route naar verlichting	14
	<i>Senna van Os</i>	
	Dé Nerdrebus	16
	<i>Yoram Veltmaat</i>	
	SpazMIERgang	18
	<i>Roxy van de Kuilen</i>	
	Vind de route naar je A-Eskwadraat hart	21
	<i>Margo van Assenbergh</i>	
	GEVONDEN: de route naar je A-Eskwadraat hart	22
	<i>Margo van Assenbergh</i>	
	Ik neem je mee	23
	<i>Roxy van de Kuilen</i>	
	De Kwantumroutes van de Padintegraal	24
	<i>Simon Vos</i>	
	How to vind de weg (MET PLAATJES!!!)	28
	<i>Margo van Assenbergh</i>	
	Heb jij de route gevonden?	29
	<i>Lara Timmers</i>	
	QQQ: Quirijns Queens Qwebbelen	30
	<i>Emma Scheepstra</i>	

Uitgave 25 juni 2025
Oplage 200
Deadline 5 december 2025

De Vakidioot is een uitgave van
 Studievereniging A-Eskwadraat
 Princetonplein 5
 3584 CC Utrecht

Telefoon (030) 253 4499
Fax (030) 253 5787
Website a-eskwadraat.nl/vakid
E-mail vakid@a-eskwadraat.nl

Redactie

Senna van Os
 Margo van Assenbergh
 Wout Koekoek
 Lara Timmers
 Roxy van de Kuilen
 Yoram Veltmaat

Voorzitter

Margo van Assenbergh

Eindredactie

Roxy van de Kuilen

Secretaris-Generaal

Yoram Veltmaat

Omslag

Wout Koekoek

Met dank aan

Kevin van Dijk
 Simon Vos

Redactioneel

Lieve lezer,

Het is de laatste editie van het jaar alweer! Dit keer hebben we weer ons best gedaan om een creatief thema te bedenken, met als resultaat: *route*. En zoals altijd hebben we daar weer een hoop mooie artikelen bij geschreven. Wat ik leuk vind aan deze editie, is dat we ook weer wat gastartikelen binnen hebben gekregen! Die gaan over padintegralen en over Eulerwandelingen. Als jou dat (nog) niets zegt, dan zou ik je zeker aanraden om deze artikelen te lezen, daar wordt het allemaal uitgelegd. Maar goed, ook als je je afvraagt hoe mieren hun snelste route kiezen, ben je bij deze editie van de Vakidioot op de juiste plek. Soms lukt het je niet om met behulp van je snelste route op tijd bij college te komen bijvoorbeeld, dan kan misschien het artikel *Met relativiteit kom je op tijd* iets voor jou zijn. Naast al deze interessante artikelen zijn er ook weer puzzels deze editie; weet jij de weg door het doolhof naar A-Es te vinden? Ook zijn we weer creatief geweest met taal en kun je gedichten lezen.

Het was een leuk jaar bij de Vakidioot en ik hoop dat we volgend jaar weer met nieuwe energie kunnen starten aan de volgende edities. Wie weet zien we dan ook wat nieuwe gezichten in de redactie?! Stel nou dat jij dat wel ziet zitten, schroom dan niet om een mailtje te sturen naar de redactie.¹ Verder wil ik de lezers van de Vakidioot bedanken voor alle leuke reacties die we hebben gekregen over eerdere edities. Ik hoop dat deze editie ook weer in de smaak valt!

Toedels en namens de redactie veel leesplezier,
 Margo van Assenbergh
Voorzitter Vakidioot



¹Vakidioot@a-eskwadraat.nl

Van de voorzitter

Quirijn Kokkeler



Lieve leden,

Daar is ie dan. Mijn laatste voorwoord voor de Vakidioot als voorzitter van het 79ste bestuur der Studievereniging A-Eskwadraat. Ik hoop dat jullie zullen genieten van mijn wijze woorden en natuurlijk ook van de rest van de Vakidioot.

Voor veel van jullie is inmiddels het einde van het collegejaar in zicht. Voor sommigen het einde van jullie eerste jaar studeren! De universiteit is inmiddels een wat minder onbekende plek voor jullie en hopelijk hebben jullie veel nieuwe vrienden gemaakt en vette natuurkundige en/of wiskundige concepten geleerd. Helaas heeft iedereen de laat-

ste maanden geen mogelijkheid gehad om in de gezelligheidskamer te chillen. Maar wees gerust! Vanaf september zal de A-Eskwadraatkamer haar deuren weer openen!

In de tussentijd zijn er natuurlijk wel nog voldoende activiteiten geweest! Zo hadden we onze prachtige mei carrièremaand met activiteiten zoals het carrièresymposium, consultancyevent en de bedrijvenborrel. Hopelijk hebben jullie hierdoor een betere kijk gekregen op wat je nou eigenlijk allemaal kan doen naast je studie (naast *de Crew* spelen natuurlijk). Daarnaast hadden we ook nog voldoende ludieke activiteiten. Zo heeft Owattenaait plaatsgevonden, zijn we naar een trampolinepark geweest, hebben we gezellig samen gezongen bij de cantus en zijn we met de studiereis naar Edinburgh en Liverpool gegaan! Krijg je hier een beetje FOMO van? Geen zorgen, want er komen nog voldoende activiteiten aan. Join vooral ook de promotiewhatsappgroep zodat je op de hoogte blijft van alle activiteiten!

Ten slotte zijn we inmiddels begonnen aan de route richting de bestuurswissel! Het 80ste kandidaatsbestuur is ingestemd, hun functies zijn verdeeld, en wellicht dat sommigen van hen inmiddels een eerste functie-inwerking hebben gehad! Zij hebben in ieder geval ontzettend veel zin om het nieuwe bestuur van onze prachtige vereniging te worden! En wij hebben er natuurlijk ook super veel zin in om het stokje aan dit prachtige kandidaatsbestuur over te dragen. Kom vooral naar de eindejaarsbarbecue om hoi tegen ze te zeggen! Ik hoop jullie daar in groten getale te zien om samen het jaar af te sluiten. Veel plezier met het lezen van de Vakidioot! De redactie heeft weer een pareltje geproduceerd!

Veel liefs,

Quirijn Kokkeler

Voorzitter A-Eskwadraat



Hoeveel wegen leiden er nou echt naar

Rome?

Margo van Assenbergh

Elke keer wanneer iemand het gezegde 'alle wegen leiden naar Rome' gebruikt, vraag ik me af hoeveel wegen dat dan zijn. Leiden echt *alle* wegen naar Rome? En wat telt dan als een weg? Mag je met een boot het water over? En hoe zit het dan met de tunnel tussen het Verenigd Koninkrijk en Frankrijk? Moet een auto ook over de weg kunnen, of telt een voetpad ook? Mag je met het vliegtuig? In de tijd van het ontstaan van het gezegde, bestonden er nog helemaal geen auto's, vliegtuigen of een tunnel tussen Engeland en Frankrijk.

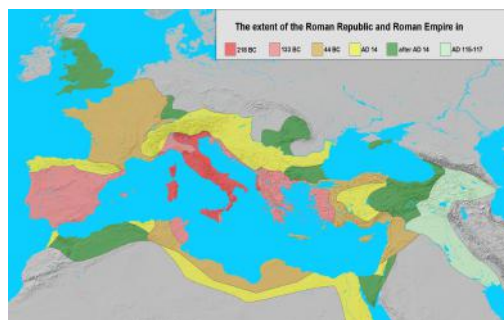
Het gezegde en de geschiedenis

Met het gezegde 'alle wegen leiden naar Rome' zeg je eigenlijk dat er meerdere (of oneindig veel) manieren zijn om je doel te bereiken. Sommigen gebruiken het spreekwoord ook om aan te geven dat de route niet uitmaakt, maar dat je uitkomst altijd hetzelfde zal zijn. Het metafoor refereert aan het gigantische wegennetwerk in Europa, Afrika en Azië dat de Romeinen hebben aangelegd, om alle uithoeken van het Romeinse rijk te kunnen bereiken.

Het Romeinse rijk liep in het jaar 0 zelfs tot in Nederland. Hier hebben de Romeinen langs de Rijn allemaal forten en andere militaire bouwwerken neergezet.¹ Dit vormde de grens van hun gebied. Deze bouwwerken waren verbonden aan elkaar met wegen en dat vormde dan het grote wegennetwerk van het Romeinse rijk, wat tussen de 80.000 en 120.000 kilometer aan wegen bevatte.

Het netwerk aan wegen was belangrijk voor de verdediging van het Romeinse rijk. Zo konden legers zich efficiënt verplaatsen, maar ook onder andere voedsel en bouwmaterialen werden sneller vervoerd met behulp van karren. Deze karren waren alleen niet zo wendbaar waardoor de Romeinse

wegen vaak zo recht mogelijk waren. Zelfs na het verval van het Romeinse Rijk werden veel van de wegen nog steeds gebruikt en sommigen bestaan tot de dag van vandaag. Nu we weten waar het gezegde vandaan komt, kunnen we verder met het definiëren van het probleem.



Figuur 1 Het Romeinse rijk.

Hoeveel Romes zijn er?

Om erachter te komen hoeveel wegen er naar Rome leiden, moeten we eerst even stil staan bij het feit dat er niet maar één Rome is. Een beetje flauw, omdat we allemaal weten om welke Rome het gaat, maar goed, het is niet geheel onbelangrijk. Er is namelijk zelfs een Rome in Nederland, het ligt in

¹Zelfs in en rondom Utrecht zijn er restanten van gevonden! Zo is er in de buurt van Fort Vechten (niet van de Romeinen) een kunstwerk van het castellum Fectio gemaakt waarbij oude Romeinse vondsten te zien zijn en kan je de omvang van het oude fort ervaren. Daarnaast is de wachttorens Fectio hier nagebouwd.

de provincie Gelderland. De weg naar deze Rome vanuit bijvoorbeeld het BBG is daardoor een stuk korter dan de weg naar het Italiaanse Rome.

Het voordeel van het betrekken van de andere Romes is dat het gezegde ook op andere continenten kan gelden. Bij bijvoorbeeld Noord- en Zuid-Amerika ligt de oceaan namelijk een beetje in de weg om naar het Italiaanse Rome te kunnen gaan. Gelukkig ligt er op elk continent een Rome (of Roma). Zo zijn er in Noord-Amerika meer dan tien Romes, waardoor het spreekwoord ook daar van toepassing is! In theorie zou er op elk eiland met wegen een Rome moeten zijn, om ook deze wegen te laten leiden naar Rome. Dat is helaas niet het geval, neem bijvoorbeeld ons waddeneiland Texel. Daar is geen Rome.



Figuur 2 Steden met de naam Rome in Europa.

Het antwoord

Benedikt Gross, Philipp Schmitt en Raphael Reimann hebben een project gestart om onze vraag op te lossen: het *Roads to Rome* project. Als eerst zijn ze uitgegaan van slechts één Rome, de enige echte in Italië, en hebben alleen de wegen in Europa beschouwd. Vervolgens hebben ze Europa in een 26.503.452 km² grid gezet. Hierin hebben ze in totaal 486.713 startpunten vastgesteld, en daar hebben ze een algoritme op losgelaten dat steeds één (kortste) route vindt vanaf elk startpunt naar Rome. Ze hebben dit op een kaart van Europa weergegeven en naar mate een weg vaker gebruikt werd, des te dikker deze gekleurd werd op de kaart. Doordat er voor elk startpunt een route gevonden kon worden naar Rome, zijn er in totaal ook 486.713

wegen naar Rome. Zoals je op de kaart kan zien, maken ze in de berekening van de route wel gebruik van de kanaaltunnel tussen het Verenigd Koninkrijk en Frankrijk. Het lijkt erop dat er gebruik wordt gemaakt van een route met de boot, want er is geen tunnel tussen Ierland en Engeland. Als je goed kijkt bij Scandinavië en Sardinië, zie je ook lijnen waarmee een bootroute wordt aangeduid. Voor zover ik weet bestaan zulke lange wegen dwars door zee niet.



Figuur 3 Alle wegen naar de Italiaanse hoofdstad Rome.

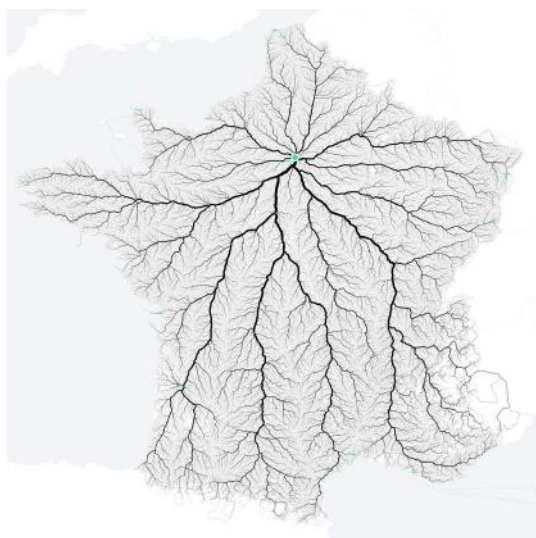
En meer

Het *Roads to Rome* project hield niet op bij alleen het uitzoeken van de wegen naar het Italiaanse Rome. Het werd een verder, breder onderzoek naar de (on)efficiënte infrastructuur van verschillende steden. Daarnaast hadden ze nu toch al een goed werkend algoritme, welke ze ook voor andere mooie plaatjes konden gebruiken. Zo hebben ze voor elke cel in het raster gekeken welke hoofdstad het meest dichtbij ligt, waardoor je een mooi plaatje krijgt van alternatieve landsgrenzen in Europa. Hierdoor lijkt Nederland Limburg kwijt te raken, maar krijgen we een stukje van Duitsland erbij.



Figuur 4 Alle routes naar de meest nabije hoofdstad.

Het wordt ook interessant als je binnen een land de routes naar de hoofdstad gaat tekenen. Dit hebben de onderzoekers gedaan voor Duitsland en Frankrijk. Je ziet voor Frankrijk meer verschillende hoofdwegen die ook nog eens vaker gebruikt worden. In Duitsland is dat anders, hier duurt het langer voordat je op een hoofdweg bent, maar je hoeft ook minder vaak een hoofdweg te gebruiken. De oplettende lezer ziet dat er een weg dwars door Tsjechië heen gaat. Niet geheel toevallig gaat deze weg langs Praag. Uit het onderzoek blijkt namelijk dat de infrastructuur van landen vaak richting de hoofdstad gevormd is. Daarom is het voor een aantal plekken in Duitsland korter om via een andere hoofdstad te rijden, want daar zijn de wegen opgebouwd. Wat mij opviel is dat de Franse Alpen niet zichtbaar zijn in de routes naar Parijs. Ook in het Zuiden van Duitsland lijken de wegen niet beïnvloed te worden door het gebergte. Misschien dat het op deze schaal niet zichtbaar is. Helaas hebben de onderzoekers hier niets over geschreven.



Figuur 5 *Alle routes in Frankrijk naar Parijs.*



Figuur 6 *Alle routes in Duitsland naar Berlijn.*

Dus wat hebben we nu geleerd?

Het spreekwoord verwijst dus naar het indrukwekkende wegennetwerk van de oude Romeinen. Tegenwoordig hebben we meer wegen en meer manieren van transport dan in de tijd van de Romeinen. Dat maakt ons vraagstuk ingewikkelder. De onderzoekers van het *Roads to Rome* project lijken zowel treintunnels als veerboot routes te gebruiken wanneer het nodig is. De hoeveelheid wegen die naar Rome leiden blijft een lastige vraag, ook al hebben de onderzoekers van het project een prima schatting gemaakt voor Europa. Het blijft een vraag waarvan het antwoord compleet afhangt van de definities die je maakt. Misschien moeten we de vraag maar net zo behandelen zoals sommigen het gezegd behandelen. Het maakt niet uit hoe je er komt, uiteindelijk ben je in Rome en kan je genieten van een heerlijk ijsje terwijl je kijkt naar het Colosseum, Pantheon of de Trevifontein.

Bibliografie

- [1] Algemeen Nederlands Woordenboek <https://anw.ivdnt.org/article/alle%20wegen%20leiden%20naar%20Rome>
- [2] <https://isgeschiedenis.nl/nieuws/alle-wegen-leiden-naar-rome>
- [3] De website van het project *Roads to Rome* bestaat helaas niet meer, maar via deze link kan je een oude versie zien. <https://web.archive.org/web/20210125021250/https://www.move-lab.com/project/roads-torome/>

Wiskundig wandelen

Kevin van Dijk

We krijgen dagelijks allemaal te maken met routes. Zo heb je natuurlijk vol vreugde een route afgelegd van je slaapkamer naar de editie van deze Vakidoot en loop je waarschijnlijk op een werkdag een crazy route door het KBG-BBG-Minnaert complex. Bij het plannen en visualiseren hiervan kan je veel wiskundige vragen stellen. Zo kan je je bijvoorbeeld als postbode afvragen of je een route kan inplannen om langs alle straten precies één keer te lopen, zodat je niet te veel stappen hoeft te zetten. Wie weet was je laatst zo'n puzzeltje aan het maken waarbij je een figuur moet tekenen zonder je potlood van het papier te halen. Dan ben je natuurlijk in feite ook een route aan het tekenen met je potlood.

Motivatatie en theorie

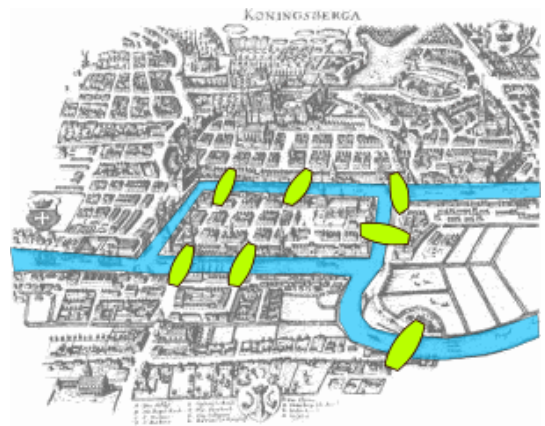
Een klassiek probleem van deze vorm is het zogeheten Koningsbergen probleem. De stad Koningsbergen ligt in het huidige Kaliningrad aan de rivier de Pregel. In deze stad zijn zeven bruggen aangelegd om de verschillende delen van de stad met elkaar te verbinden, zie Figuur 1 voor een schematische weergave. De vraag is dan of iemand een route kan plannen die precies één keer over elke brug loopt. Voordat we de vraag beantwoorden kijken we eerst kort naar de wiskunde erachter.

We gaan kijken naar de begrippen Eulerwandelingen en Eulercircuits. In grafentheorie¹ is een Eulerwandeling een route/wandeling die begint en eindigt bij een knoop, waarbij je over alle zijden precies één keer loopt. Een Eulercircuit is een speciaal soort Eulerwandeling, waarbij het begin- en eindpunt hetzelfde zijn. Een stelling van Euler zegt het volgende:

Stelling. *In een graaf kan je een Eulerwandeling lopen precies als de graad, het aantal zijden verbonden aan een knoop, van precies 2 of precies 0 knopen oneven is. In het laatstgenoemde geval is de Eulerwandeling een Eulercircuit.*

De implicatie dat een graaf met Eulerwandeling 2 of 0 knopen met oneven graad moet hebben is niet eens al te ingewikkeld om te begrijpen. Bekijk maar eens een knoop met oneven graad. Als mijn route langs dat punt gaat, dan kom ik er aan en loop ik er daarna weer van weg. Deze 'ontmoeting' met de knoop draagt dus met precies 2 bij aan de graad van die knoop. Dit geldt natuurlijk voor bijna al mijn ontmoetingen met knopen, dus bijna alle

knopen moeten wel even graad hebben. Uitzonderingen hierop zijn het begin- en eindpunt van mijn route, die zorgen voor een bijdrage van 1 aan de knoop. Er volgt dat er twee knopen met oneven graad zijn, behalve als het begin- en eindpunt hetzelfde zijn. Dan heeft ook dat punt een even graad.



Figuur 1 Een weergave van de stad Koningsbergen in de 18e eeuw, met de bruggen over de rivier de Pregel gemarkeerd.

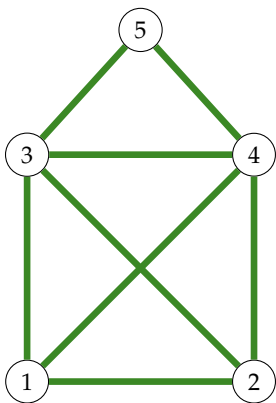
De bovenstaande redenering verklaart in ieder geval een beetje waar de stelling vandaan komt. Het krachtige van de stelling is dat deze ook andersom geldt: als ik een graaf heb waarvan de graad van precies 2 of 0 knopen oneven is, dan kan ik ook daadwerkelijk zo'n Eulerwandeling of -circuit lopen. Maar zoals alle andere wiskundigen houd ik ervan om moeilijke dingen achter een krachtige stelling te stoppen en dan door te gaan met mijn leven. Ik ga bovenstaande stelling dan ook niet bewijzen.

¹Voor wie het niet weet: (ongewogen, ongerichte) graaf is een verzameling knopen en verbindingen tussen twee knopen, die we zijden noemen.

Terug naar het Koningsbergen probleem. Dit probleem zouden we kunnen vertalen naar grafentheorie door de stadsdelen als knopen te kiezen en de bruggen als zijden. In deze graaf hebben alle vier de stadsdelen een oneven graad, namelijk telkens 3 of 5, dus daarmee hebben we de vraag beantwoord: het is inderdaad onmogelijk om precies één keer over elke brug te lopen.

Toepassingen in het dagelijks leven

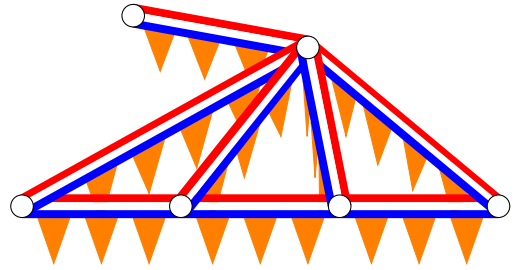
Een heel ander probleem dat we allemaal als kind zijn tegengekomen, is de volgende opdracht: Teken een huisje, zoals in Figuur 2, zonder je potlood van het papier af te halen. Ook hier ben je eigenlijk met je potlood een Eulerwandeling aan het tekenen. Laten we even checken of het kan: de graden van de punten zijn op volgorde 3, 3, 4, 4, 2. Twee getallen zijn oneven, dus we kunnen inderdaad een Eulerwandeling maken! We kunnen door onze opgedane kennis ook inzien dat we moeten beginnen/eindigen bij de twee punten onderin.



Figuur 2 Een huisje met een kruisje. Opdracht: Teken deze figuur na zonder je potlood van het papier af te halen!

Een iets recenter voorbeeld kwam ik afgelopen Koningsdag tegen bij mijn huis. Mijn burens van de flat naast mij hadden namelijk een slinger van oranje vlaggetjes opgehangen ter decoratie. De vlaggetjes begonnen bij een muur, en werden verder verbonden door een aantal paaltjes en bomen. In Figuur 3 heb ik een schematische weergave gegeven.² Net

als in de figuur kon ik ook niet zo goed zien hoe de slinger van vlaggetjes precies liep. Als je in de figuur de mogelijkheden afgaat dan zal je ook zien dat het je nooit gaat lukken om een manier te vinden om die slinger langs alle paaltjes te laten lopen. Inderdaad, er zijn namelijk 4 punten met oneven graad! Met onze stelling zien we dat er dus minstens twee slingers gebruikt moeten zijn.



Figuur 3 Een schematische weergave van de vlaggetjes-situ zoals bij mij in de straat.

Ook komen we nog even terug op onze arme postbode. Die wil natuurlijk op hetzelfde punt terugkomen als waar die begon, dus die wil Eulercircuits lopen. Echter bestaan vrij veel kruispunten uit slechts drie wegen die samenkomen,³ dus kan de postbode geen Eulercircuits lopen.

Als afsluiter ook nog een heel andere opgave waar je over na kan denken:

Opgave. Gegeven zijn $4n$ stenen met gewichten $1, 2, 3, \dots, 4n$. Elke steen is gekleurd in één van de n gegeven kleuren en er zijn vier stenen van elke kleur. Bewijs dat de stenen in twee stapels verdeeld kunnen worden zodanig dat aan de volgende twee voorwaarden wordt voldaan:

- Het totale gewicht van de ene stapel is gelijk aan het totale gewicht van de andere stapel.
- Elk van beide stapels bevat twee stenen van elke kleur.

Dit was opgave 3 uit de Internationale Wiskunde Olympiade 2020 (dat wil zeggen, de moeilijkste opgave van dag 1). Op het eerste gezicht lijkt deze opgave niets met Eulerwandelingen en -circuits te maken te hebben, toch is dit een hint naar de oplossing. Veel puzzelplezier!

²Shoutout naar Roxy voor het prachtige plaatje, volledig gemaakt met TikZ.

³Ik heb hier geen daadwerkelijk onderzoek naar gedaan.

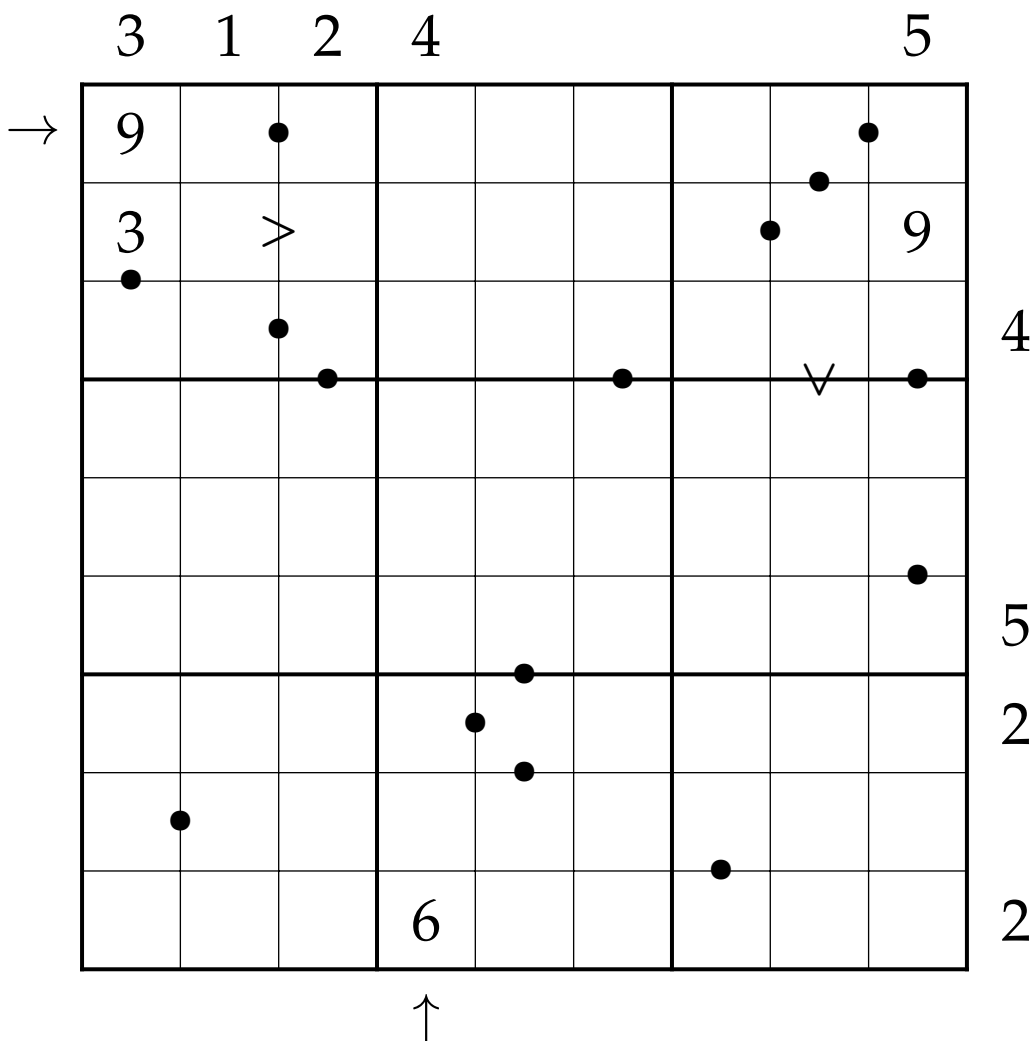
'Vind de route'-sudoku

Lara Timmers

Hoi liefjes, hier is weer een nieuwe sudoku. De oplossing staat verder in deze editie, maar als je jezelf niet te veel wil spileren dan kan je me ook altijd appen voor een hint. De regels zijn als volgt:

- Plaats de getallen 1-9 in elke rij, kolom en vierkant van 3x3 vakjes.
- Vind een route door de sudoku: hij begint en eindigt bij de pijlen en elk al gegeven getal ligt op de route. De route beweegt zich orthogonaal door de sudoku en mag zichzelf niet kruisen. Getallen die naast elkaar op de route liggen moeten een veelvoud van elkaar zijn. Verder staan er getallen buiten de sudoku, die aangeven hoeveel van de vakjes in die rij of kolom door de route worden genomen.
- De zwarte stippen geven aan dat de getallen aan beide kanten een verhouding van 1 op 2 hebben. Als er geen zwarte stip tussen twee getallen staat, mogen ze niet een verhouding van 1 op 2 hebben.
- Een 'groter dan'-teken tussen twee getallen betekent dat de één groter moet zijn dan de andere.

Veel plezier en succes!



Met relativiteit kom je op tijd

Yoram Veltmaat

Als je een beetje op mij lijkt, dan herken je het wel: je stapt te laat op de fiets, hopen dat je wind mee hebt om zo toch nog op tijd te komen op de uni. Dit leidt tot de vraag “kan dat niet sneller?”. Vandaag leer je hoe je relativiteit kunt gebruiken om de snelste route te vinden.

Tensoren in Relativiteit

Om te berekenen hoe je zo snel mogelijk van A naar B toe kunt gaan, is het handig om eerst te begrijpen wat een *tensor* is. We gaan geen hele formele introductie doen, enkel wat nodig is. Nou, daar gaan we dan: een tensor is een object van een bepaald ‘type’ (r, s) met r, s positieve gehele getallen.¹ Met bepaalde tensoren ben je al bekend. Zo is een $(0, 0)$ tensor een scalair. Een $(1, 0)$ tensor is een kolomvector waarvan we de componenten weergeven als x^i (dit is dus *geen* machtsverheffing, maar de i -de component van de vector). Een $(0, 1)$ tensor is een rijvector met componenten die we schrijven als x_i . Merk op dat de plaatsing van de index dus uitmaakt! Een $(1, 1)$ tensor is een afbeelding T die werkt op een kolomvector en een rijvector. De $(1, 1)$ tensor spuugt dan een getal uit (wat weer een $(0, 0)$ tensor is!). Je kunt een $(1, 1)$ tensor ook weergeven als een matrix met componenten die we schrijven als T_j^i .² Op eenzelfde manier kunnen we een $(2, 0)$ tensor en een $(0, 2)$ tensor ook weergeven als matrices met componenten T^{ij} en T_{ij} respectievelijk. Het verschil tussen een $(1, 1)$ tensor en een $(2, 0)$ of een $(0, 2)$ tensor is waar de afbeelding T op werkt. Voor een $(1, 1)$ tensor is het een kolom en een rijvector, voor een $(2, 0)$ tensor zijn het twee rijvectoren, en voor een $(0, 2)$ tensor zijn het twee kolomvectoren. Op eenzelfde manier kunnen we dit voortzetten voor tensoren van een ander type, je krijgt dan gewoon meer indices. Merk wel op dat het dan niet langer als matrix weer te geven is. Je kunt in plaats daarvan denken aan een multidimensionale array.

Als we nu gaan rekenen, krijgen we al heel snel heel veel indices. Om veel uitdrukkingen iets korter te maken, is het handig om de *Einstein notatie* in te voeren. Als we een uitdrukking hebben waarin een index tweemaal voorkomt, eenmaal als subscript en eenmaal als superscript, dan sommeren we over die index. Bijvoorbeeld $x_i x^i \leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i x^i$. Je kunt dit ook doen met tensoren van een ander type. Een voorbeeld: $T_i^j x^i \leftrightarrow \sum_{i=1}^n T_i^j x^i$.

Dan nu het laatste voordat we echt kunnen beginnen: de metriek. In relativiteit is er een tensor die de *metriek* heet, die indices kan verhogen of verlagen. We geven de metriek weer met de letter g . Het verhogen of verlagen gaat als volgt:

$$x_i = g_{ij} x^j, \quad y^i = g^{ij} y_j. \quad (1)$$

Merk op dat we hier al gebruik maken van de Einstein notatie! We sommeren immers over de index j in beide gevallen. Een andere belangrijke eigenschap van de metriek is dat $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$, waarbij $\delta_i^k = 1$ wanneer $i = k$ en 0 als $i \neq k$. Zo is g^{ij} dus de inverse van g_{ij} .

De metriek functioneert op een manier die je misschien wel zou verwachten bij het woord ‘metriek’: het definieert ook een afstand. De lengte van een pad γ tussen punten A en B is gedefinieerd als:

$$\ell(\gamma) := \int_{\gamma} \sqrt{ds^2}, \quad (2)$$

waarbij $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$.

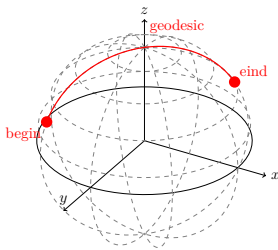
¹Formeel gezien is een tensor T van type (r, s) een afbeelding $T : V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ met V een vectorruimte. Je hebt hier r keer een V^* en s keer een V in het product.

²De componenten krijg je door een basis te kiezen voor je vectorruimtes en je tensor daarop te evalueren.

Er geldt bijvoorbeeld voor $\mathbb{R}^2$ met de gebruikelijke rechthoek-coördinaten dat³ $[g_{ij}] = \text{diag}(1, 1)$. Immers geldt er dat $g_{ij} dx^i dx^j = dx^2 + dy^2$, precies zoals je misschien wel verwacht had.⁴

Geodeten

Om zo snel mogelijk naar de uni te gaan, is het belangrijk dat we het optimale pad kiezen tussen je huis en de uni. Als de aarde vlak was geweest, dan zou een rechte lijn de kortste route zijn tussen je huis en de uni. Jammer genoeg is de aarde niet vlak. Sommigen beweren dat de aarde rond is⁵ en we zullen kijken wat de kortste route is als dit waar zou zijn. Hiervoor doen we de redelijke aanname dat de aarde perfect rond is. Mocht je dit onredelijk vinden, dan kom je waarschijnlijk uit Gelderland of Limburg waar wel heuvels bestaan⁶ maar voor de rest van Nederland zie ik dit als een redelijke aanname. Ook op gebogen oppervlakken bestaat er een kortste route, en dat noemen we een *geodeet*.



Figuur 1 Een geodeet tussen twee punten op een boloppervlak.

Het is niet altijd praktisch om formule 2 te minimaliseren. Gelukkig is er een alternatief. Een pad⁷ (x^i) dat afhangt van een parameter s is een geodeet precies wanneer het voldoet aan de vergelijking:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (3)$$

Vergelijking 3 noemen we vanaf nu de *geodetische vergelijking*. Hierbij is Γ gedefinieerd als:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{i\ell} (\partial_j g_{\ell k} + \partial_k g_{j\ell} - \partial_\ell g_{jk}). \quad (4)$$

³diag staat voor diagonaal. Je geeft dus alleen de diagonaal-elementen weer van de matrix die je bedoelt, en de rest is nul.

⁴Ga maar na: $g_{ij} dx^i dx^j = g_{11} dx^1 dx^1 + g_{22} dx^2 dx^2$ met $dx^1 = dx$ en $dx^2 = dy$.

⁵Dit is enkel wat 'Big S²' wil dat je gelooft.

⁶Ik vind ook niet dat ik echt rekening hoeft te houden met de mensen die hiervandaan komen. Jullie hebben andere coole dingen zoals vlaai of de winst van de **betonprijs**.

⁷Merk op dat dit een vector is met onze nieuwe notatie.

⁸Uiteraard heb ik weer gekozen voor een onderwerp wat onnodig veel rekenwerk was :(

In deze formule gebruiken we de volgende notatie: $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$. In dit geval is Γ een zogenaamd *Christoffelsymbool*. Opnieuw geldt dat we in vergelijking 3 en 4 Einstein sommatie gebruiken.

Een Ronde Aarde⁸

Onder de zeer redelijke aanname dat de aarde een perfecte bol is, kunnen we berekenen hoe je moet fietsen om zo snel mogelijk aan te komen. We gebruiken bolcoördinaten, waarbij we de straal van de aarde normaliseren. Je positie is dan te beschrijven met de de coördinaten $(x^1, x^2) = (\theta, \phi)$.

Er geldt voor de metriek op een bol dat

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{bmatrix},$$

zodat $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. We kunnen nu kijken naar de geodeten op een bol. We moeten hiervoor eerst de Christoffelsymbolen uitwerken. Er zijn er maar een paar ongelijk nul:

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = \sin \theta \cos \theta.$$

De rest is allemaal nul. Als we dit nu invullen in de geodetische vergelijking, dan krijgen we twee vergelijkingen (een voor $i = 1$ en een voor $i = 2$):

$$\begin{cases} \frac{d^2 \theta}{ds^2} + \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0 \\ \frac{d^2 \phi}{ds^2} + 2 \cot \theta \frac{d\phi}{ds} \frac{d\theta}{ds} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Nu geldt er dat:

$$\frac{d}{ds} \left(\sin^2 \theta \frac{d\phi}{ds} \right) = \sin^2 \theta \left(\frac{d^2 \phi}{ds^2} + 2 \cot \theta \frac{d\phi}{ds} \frac{d\theta}{ds} \right) = 0,$$

wegens vergelijking 5. We zien zo dat $\sin^2 \theta \frac{d\phi}{ds}$ constant is en noemen dit nu L , om het overzicht te bewaren. Dan geldt er dat

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{L}{\sin^2(\theta(s))}.$$

We kunnen ook uitrekenen dat voor θ geldt dat:⁹

$$\frac{d\theta}{ds} = \pm \sqrt{1 - \frac{L^2}{\sin^2 \theta}}.$$

Dit geeft dan:

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \pm \frac{L}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - L^2}}$$

wat een mooie differentiaalvergelijking is, die voor behoorlijk wat hoofdpijn zorgt. Als je van de zelfkastijding houdt, dan kun je proberen om dit op te lossen met wat substituties, maar om papier en mijn ziel¹⁰ te besparen, is het beter om gewoon de oplossing te geven. We krijgen:

$$\phi = -\arcsin\left(\frac{L \cot \theta}{\sqrt{1 - L^2}}\right) + C,$$

waarbij C een constante is. We kunnen dit omwerken tot:

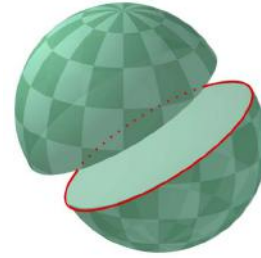
$$\frac{L \cos \theta}{\sqrt{1 - L^2}} = \sin(\theta) \left(\sin(C) \cos(\phi) - \cos(C) \sin(\phi) \right).$$

Door nu weer in Cartesische coördinaten te kijken, krijgen we:

$$x \sin(C) - y \cos(C) + z \frac{L}{\sqrt{L^2 - 1}} = 0. \quad (6)$$

Een pad tussen twee punten A en B op het boloppervlak moet voldoen aan vergelijking 6. We kunnen de vergelijking herschrijven tot $\mathbf{N} \cdot \mathbf{r} = 0$ met $\mathbf{N} = \left(\sin C, -\cos C, \frac{L}{\sqrt{1 - L^2}} \right)$ en $\mathbf{r} = (x, y, z)$ om te zien dat deze vergelijking een vlak door de oorsprong en de punten A en B beschrijft. Door te kijken naar de punten die zowel in het vlak liggen, als in het boloppervlak, zien we dat deze vergelijking een zogenaamde *grootcirkel* beschrijft.

De snelste route tussen twee punten is dus de route die via een grootcirkel loopt! Merk op dat voor twee niet-antipodale punten er een uniek kortste pad bestaat (je ziet in Figuur 1 het kortste pad, het langere pad zou via het zuidelijk halfrond gaan).



Figuur 2 Een grootcirkel verdeelt een bol in twee precies gelijke stukken.

Oké, wat kunnen we hiermee?

In de praktijk zien we dat er nog met enige regelmaat fouten worden gemaakt in wat de kortste route nu is tussen twee punten. Zelfs populaire software maakt nog met enige regelmaat fouten hierin. Stel dat je in het prachtige¹¹ Middelburg woont, en dat je graag naar het prachtige Rotterdam¹² wil voor een dagje. We zien op de onderstaande kaart dat de berekende route (weergegeven in blauw) totaal niet de geodeet volgt (weergegeven in zwart).



Figuur 3 De blauwe lijn geeft de berekende 'snelste' route aan. De zwarte lijn geeft de geodeet, en dus de enige ware snelste route aan.

Dus als jij een echte snelheidsmaniak bent, reis dan via geodeten, en geloof niet in de lui van de omwegmaffia die bij routeplanners werken. Het is schandelijk dat er nog geen routeplanners zijn die gewoon de geodeten aangeven, in plaats van de blauwe onzinroute die in Figuur 3 te zien is.

⁹Dit doe je door de snelheidsvector te normaliseren.

¹⁰Ja, die heb ik nu nog.

¹¹Ik doe dit vooral om toe te geven aan het gigantische Middelburgse publiek dat we hebben. Ik ben (helaas?) nog nooit in Middelburg geweest.

¹²Ik ben wel in Rotterdam geweest. Verder is mij aangeraden om niet te vocaal te zijn in mijn mening over Rotterdam.

Boeddha
en zijn leerling, genaamd Kip,
zitten aan een grote, ronde ontbijttafel.
Voor hun op tafel:
een grote, ronde pot stroop, en
een bus poedersuiker.

Boeddha,
wat wil u eigenlijk
op uw pannekoek?' vroeg Kip,
die naar kaneel rook en een beetje twijfel.
Hij wijst eerbiedig naar de twee attributen voor hen,
alsof het relikwieën zijn
uit de tempel van het Grote Ontbijt.

Boeddha zweeg.

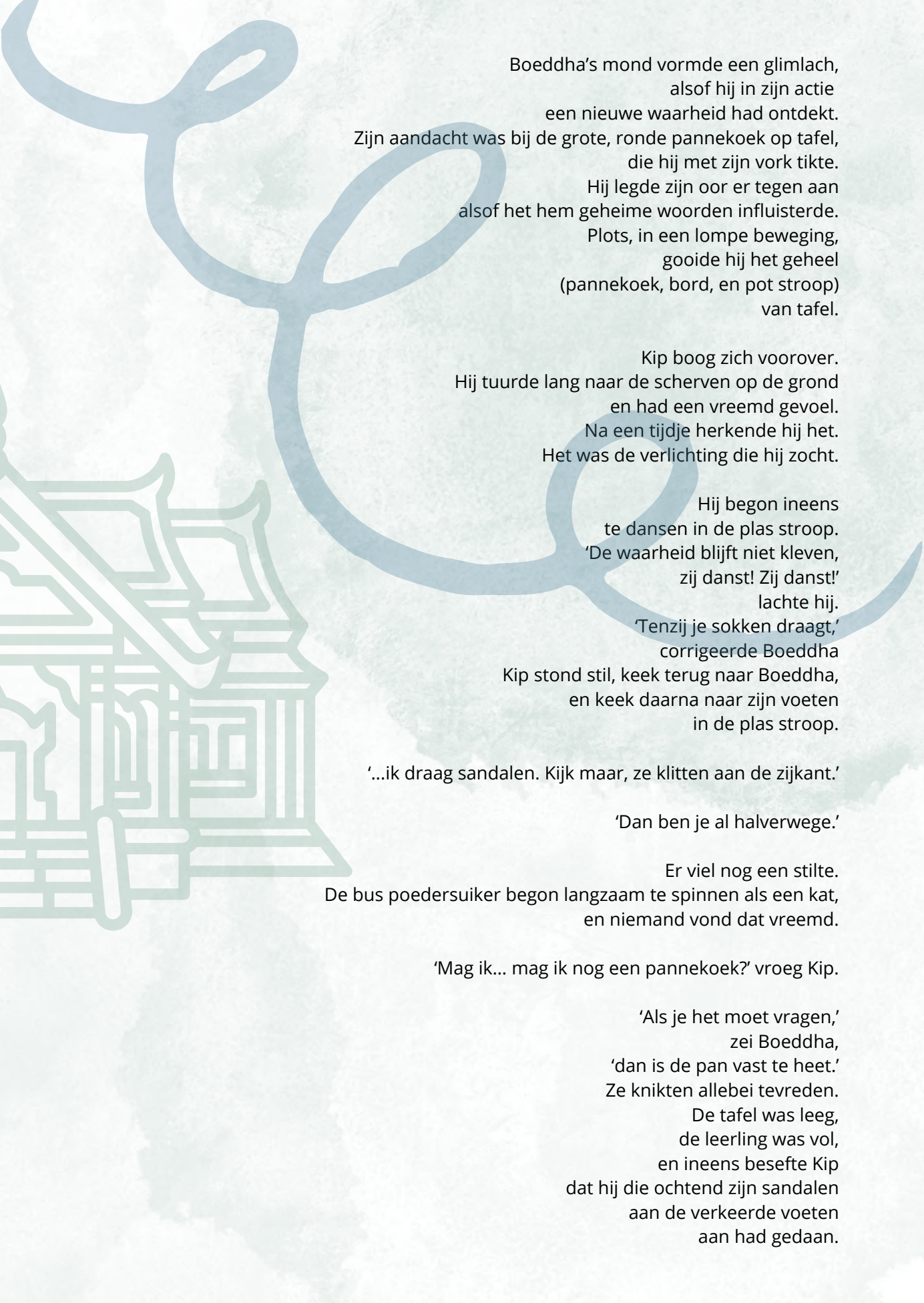
'Als u het me niet zegt,'
sprak Kip met voorzicht
'moet ik misschien raden?'
Een stilte.
'U bent zeker een stroopliefhebber?'

Boeddha ademde diep uit.
'Als je het moet vragen,'
zei hij,
'dan weet je het niet.'
De woorden trokken een grote rimpel
op Kips voorhoofd.
Hij keek naar zijn voeten,
en vroeg zich af of hij iets verkeerd had gedaan.
Nog een lange stilte.

Langzaam tilde Boeddha zijn hand op.
Hij greep de bus,
strooide de poedersuiker in zijn hand,
en waaide het ineens
vol in het gezicht van Kip.

Een wolk van wit
hing even in de lucht,
en bleef kleven aan Kips wimpers.
Proestend:
'Is dit een les? Waarom, Boeddha?
Ik kan de poëzie er niet aan proeven.'





Boeddha's mond vormde een glimlach,
alsof hij in zijn actie
een nieuwe waarheid had ontdekt.
Zijn aandacht was bij de grote, ronde pannekoek op tafel,
die hij met zijn vork tikte.
Hij legde zijn oor er tegen aan
alsof het hem geheime woorden influisterde.
Plots, in een lompe beweging,
gooide hij het geheel
(pannekoek, bord, en pot stroop)
van tafel.

Kip boog zich voorover.
Hij tuurde lang naar de scherven op de grond
en had een vreemd gevoel.
Na een tijdje herkende hij het.
Het was de verlichting die hij zocht.

Hij begon ineens
te dansen in de plas stroop.
'De waarheid blijft niet kleven,
zij danst! Zij danst!'
lachte hij.

'Tenzij je sokken draagt,'
corrigeerde Boeddha
Kip stond stil, keek terug naar Boeddha,
en keek daarna naar zijn voeten
in de plas stroop.

'...ik draag sandalen. Kijk maar, ze klitten aan de zijkant.'

'Dan ben je al halverwege.'

Er viel nog een stilte.
De bus poedersuiker begon langzaam te spinnen als een kat,
en niemand vond dat vreemd.

'Mag ik... mag ik nog een pannekoek?' vroeg Kip.

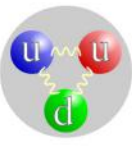
'Als je het moet vragen,'
zei Boeddha,
'dan is de pan vast te heet.'
Ze knikten allebei tevreden.
De tafel was leeg,
de leerling was vol,
en ineens beseft Kip
dat hij die ochtend zijn sandalen
aan de verkeerde voeten
aan had gedaan.

Dé Nerdrebus

Yoram Veltmaat

Bij deze de Nerdrebus. Een paar belangrijke punten:

- Op elk streepje links kunnen één of twee letters komen.
- Er zitten zowel wiskundige als natuurkundige elementen in, dus misschien moet je wel het een en ander opzoeken (of met een *ander persoon* praten...).

___ :  - $\frac{m}{V}$ - 

___ : $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} F(z) dz$ - $\left[\sqrt{\text{A-E s k l w a d i r a t}} \right] - A$

___ : $y(1)$ voor $y'(x) - y(x) = 0$ met $y(0) = i$

___ : $\left(\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty], \mu(\emptyset) = 0, \mu(\cup_k A_k) = \sum_k \mu(A_k) \right) - \left(\frac{d^2 x}{d^2 t} \right)^2 - \sqrt{S^1 \times S^1}$

(___) :  - $\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^2} - \left(\left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3 \cdot \text{A}^2} \right) - (\lambda p)m \right)$

___ : Categorie met 1 object, en elk morfisme is een isomorfisme - 

___ :  + $\sqrt{p^2 + m^2} + [(8\pi G \dots = G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) - \mu\nu] - (\cos(t) + i \sin t)^{-i}$

___ :  -  - 

___ : $\frac{\text{hihi}}{2} - \text{OL}$

LATEX WIZARD?

Lijkt het jou leuk om
wat achter de
schermen te doen bij
de Vakidioot?
Mail dan naar
[vakidioot@a-
eskwadraat.nl](mailto:vakidioot@a-eskwadraat.nl)

VAKW100T

Commissielid worden?

Wat doe je dan achter de
schermen?

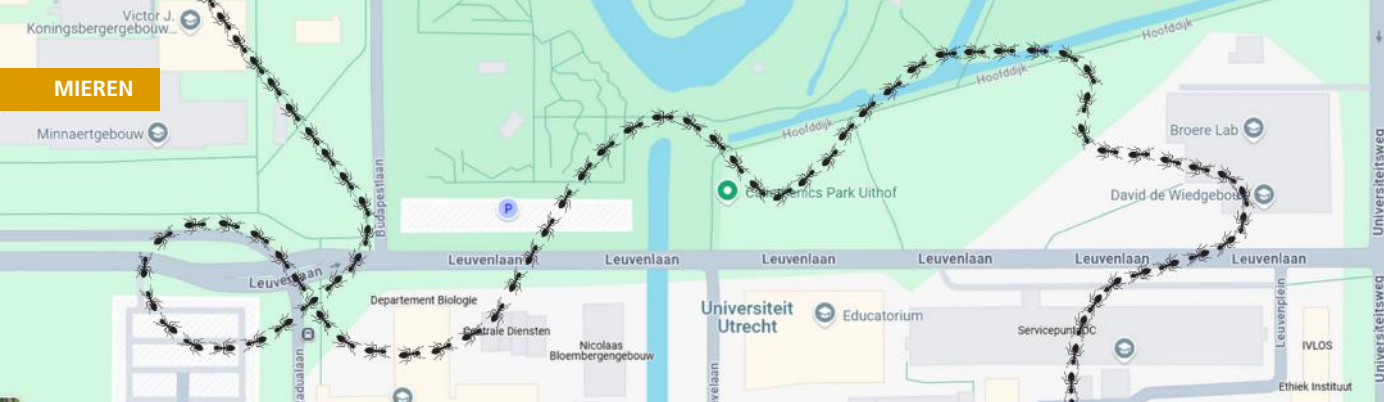
- Bij gezellige werkavonden artikelen schrijven
- Ideeën bedenken voor artikelen en thema's van de Vakidioot
- Artikelen spelchecken en/of vormgeven

TYPOSAURUS

REX OF

LETTER

LIEFHEBBER?



SpazMIERgang¹

Roxy van de Kuilen

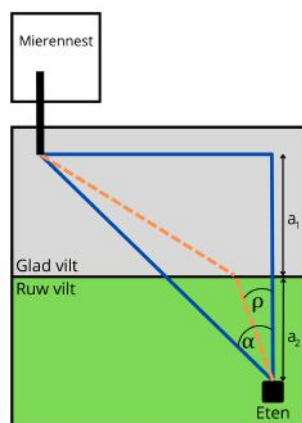
Als ik van het KBG naar het Ruppert moet lopen op de uni, ben ik intern altijd helemaal blij als ik de driehoeksongelijkheid kan toepassen om mijn wandelweg te verkorten. Ik leef voor kortste routes, die je meestal vrij makkelijk kan berekenen. Toch is de kortste weg niet altijd de snelste. Als je over verschillende ondergronden moet reizen, bijvoorbeeld een deel over gelijkmatig gestort beton en een deel over kniediep water, zal de kortste route naar je einddoel misschien niet de snelste zijn. Mocht je nou op zoek zijn naar de weg die je het minste aantal kilometers kost of juist naar de snelste route, en hoe je je route dan weer terug kan vinden, gooi Google Maps aan de kant en kijk je route af van mieren!

De kortste route...

Het blijkt dat een mierenkolonie de kortste route vindt naar iets eetbaars door een aantal verkenner-willekeurige routes te laten lopen. Als een verkenner-mier iets lekkers heeft gevonden, loopt deze terug naar het nest en geeft deze feromonen af op deze route. De feromonen vervliegen snel, wat ervoor zorgt dat de dampen van de verkenner op de kortste route het langst merkbaar zijn voor andere mieren. Andere mieren zullen dan naar het eten willen lopen, volgen het feromonenspoor en leggen zelf ook feromonen neer. Hierdoor zal het pad waar de meeste feromonen merkbaar zijn (oftewel de kortste route) steeds meer feromonen ontvangen. De feromonen op de paden die de andere verkenner gelopen hebben, zullen eerder vervliegen, waardoor mieren deze route niet opnieuw zullen lopen.

...is niet altijd de snelste

Onderzoekers² hebben ontdekt dat mieren niet alleen de kortste route naar voedsel kunnen vinden, maar ook de snelste route. De onderzoekers gebruikten ruw en glad vilt als ondergrond. Over de eerstgenoemde lopen mieren met een snelheid van 2.97 mm/s. Over de gladde ondergrond lopen de diertjes bijna twee keer zo snel; de gemiddelde snelheid is daar 1.73 mm/s.



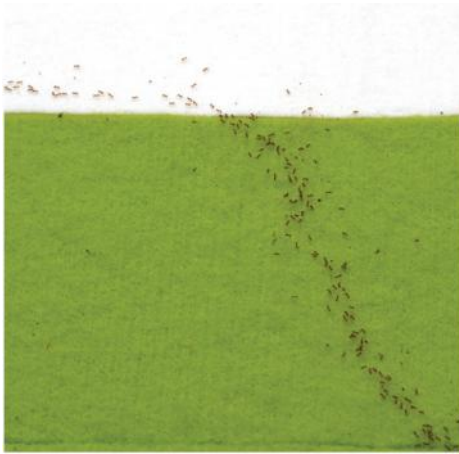
Figuur 1 De opstelling van het onderzoek. De mieren lopen vanuit het mierenest over de brug naar de 'arena' met het voedsel in de diagonaal tegenovergestelde hoek. De oranje gestippelde lijn is de voorspelde snelste route.

Met behulp van de gemiddelde snelheden v_1 en v_2 van de mieren, de afstanden van het terrein a_1 en a_2 en de hoek α van de kortste route voorspelden de onderzoekers de hoek ρ waaronder de mieren van de ene ondergrond naar de andere overgaan. Zie Figuur 1 voor de praktische opstelling. Je zou deze route kunnen vergelijken met het gedrag van een lichtstraal wanneer het door verschillende materialen reist. Dit principe van Fermat, ook wel bekend

¹Voor de mensen zonder talenknobbel: spaziergang betekent rondwandeling in het Duits.

²Het volledige onderzoek en de afbeeldingen zijn te vinden op https://www.researchgate.net/figure/The-position-of-the-food-is-on-the-rough-felt-Note-that-the-density-of-workers-on-the_fig4_236079080.

als het principe van de minste tijd, zegt dat de weg die een lichtstraal tussen twee gegeven punten aflegt, de snelste zal zijn. Deze natuurkundige wet wordt vooral toegepast in de optica. Maar, zo is gebleken, mieren gedragen zich ook conform deze wet. De route die de mieren in het onderzoek aflegden, komt nauw overeen met de voorspelde weg.



Figuur 2 Een deel van de route die mieren lopen over het gladde witte vilt en het ruwe groene vilt naar voedsel in de rechteronderhoek.

In Figuur 2 is te zien dat de mieren blijkbaar rekening houden met hun loopsnelheid op verschillende materialen. Een kanttekening bij deze ontdekking is dat de route wel lang genoeg moet zijn, anders houden de mieren zich niet aan Fermats principe. De hypothese is dat in het geval van een korte weg de feromonen van de mieren geen duidelijk pad aan kunnen geven en de insecten daarom niet de snelste route kunnen vinden. Een leuk detail dat te zien is in Figuur 2, is dat mieren inderdaad sneller lopen op het witte vilt. Dit is te zien aan de lagere mierendichtheid per oppervlakte.

Hoe komen ze weer thuis?

Blijkbaar is het gedrag van mieren een fascinerend fenomeen; niet alleen hebben onderzoekers uitgezocht welke routes mieren nemen, er is ook onderzoek gedaan naar hoe de mieren dan weer terug komen bij hun nest. Misschien heb je wel eens een mier zien lopen met een kruimel tussen de kaken. Deze was dan waarschijnlijk op de terugweg naar het moedernest. Als mieren terug willen naar huis,

gebruiken ze verschillende middelen om hun route te bepalen. Zo onthouden ze hoe de bochten en afslagen voelden op de heenweg en tellen ze hoe veel stappen ze van het nest verwijderd zijn. Ook de hoek van de zon en bijzondere herkenningspunten helpen de beestjes om de weg terug te vinden.

Soms vindt een mier echter een mega schat van voedsel, en kan het dier het eten niet tussen de kaken dragen. In dit geval, zal de mier achteruitlopend het eten meeslepen naar huis. Ondanks dat mieren geen ogen in hun achterhoofd hebben, kunnen ze ook achteruitlopend gemakkelijk hun weg terug vinden naar huis. Wij mensen zouden om de zoveel tijd het eten los moeten laten en achterom moeten spieken om te zien of we nog goed lopen. Het blijkt dat mieren dit relatief minder vaak hoeven te doen, omdat ze hun route naar huis baseren op de omgeving en wat ze daarvan herkennen. Onderzoekers hebben dit ontdekt door mieren een groot stuk koek terug te laten slepen naar hun nest. Alle mieren waren bekend in de omgeving, dus zouden vooruitlopend geen moeite ondervinden met de route vinden. Bij sommige achteruitlopende mieren veranderden de onderzoekers de omgeving door bergen van zwart plastic toe te voegen. In die 'nieuwe' omgeving spieken de mieren gemiddeld na 3,2 meter, terwijl de mieren die geen andere omgeving kregen pas na ongeveer 6 meter spieken. Ter vergelijking, dit zou overeenkomen met een Nederlander die pas na een kilometer spiekt of deze nog op de goede weg is³, een indrukwekkende prestatie van die kleine insectjes!

Mieren > Google Maps

Mieren zijn dus ongelooflijk goede wegwijzers. Je kan ze vragen om de kortste route te vinden als je weinig wil lopen, maar ze zijn ook nuttig om de snelste route te vinden als je haast hebt. Je zou ze zelfs kunnen gebruiken om je weg terug naar huis te vinden als je weer eens een wilde nacht hebt beleefd. Veel gezelliger dan Google Maps, zo'n loopmaatje om vier uur 's nachts. Al moet de mier dan wel bekend zijn in de omgeving en moet je ook kunnen communiceren met zo'n klein beestje. Ik denk niet dat het mij zal lukken, maar wie weet ontwaakt er in jou een mierenfluisteraar! Doe er je voordeel mee!

³Een mier is gemiddeld 10 mm lang, en een mens gemiddeld 1750mm.



Ik kijk niet,
misschien
houden ze
dan op.

**MELD STRAAT-
INTIMIDATIE**

Straatintimidatie maakt bang en
is vernederend. **Daar doe jij toch
niet aan mee?**



Gemeente Utrecht

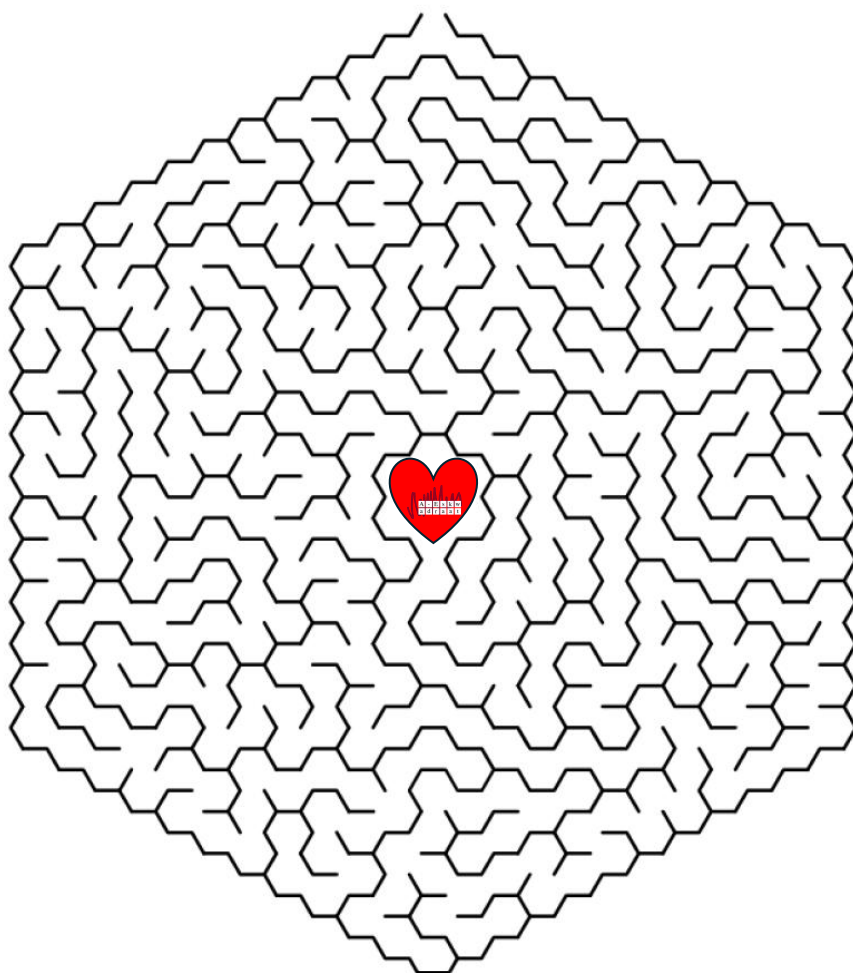
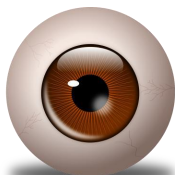


**Utrecht.nl/
straatintimidatie**

Vind de route naar je A-Eskwadraat hart

Margo van Assenbergh

Met de huidige verbouwing raakt menig A-Eskwadrater¹ wel eens de weg kwijt naar de gezelligheid. Nu er geen fysieke gezelligheidskamer meer is, zou er een *uit-het-oog-uit-het-hart*-situatie kunnen ontstaan. Gelukkig is het nog geen verloren zaak. Breng het oog bij het A-Es hart en ervaar gezelligheid.

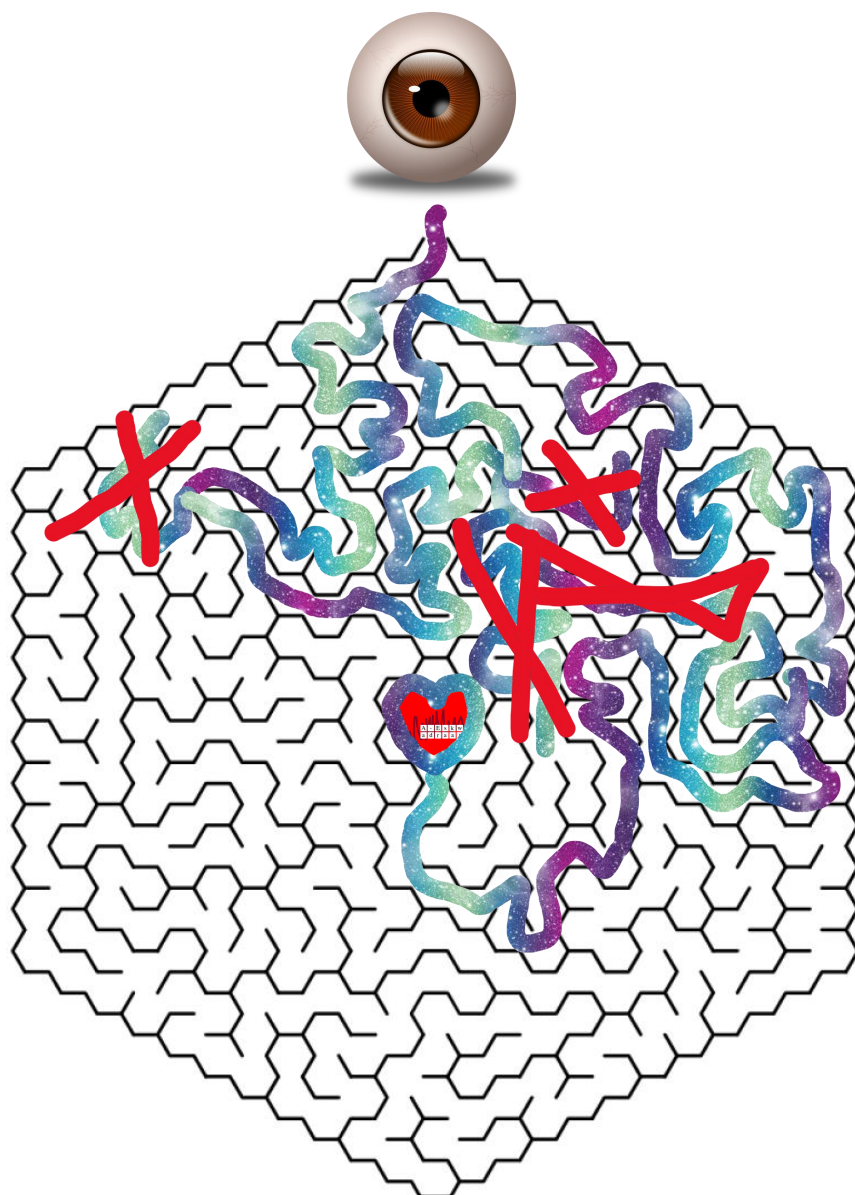


¹Ja mensen, volgens de site, onderaan de pagina 'handleidingen' staat vermeldt dat we onze leden zo moeten noemen.

GEVONDEN: de route naar je A-Eskwadraat hart

Margo van Assenbergh

Zoals je ziet ging het oplossen van het doolhof bij ons niet van een leien dakje, hopelijk ging het bij jou een stuk beter!



Ik neem je mee

Roxy van de Kuilen

Mocht je eens een vrije dag mogen beleven,
En heb je al je inlevers en gastartikelen al geschreven?
Wil je ook wel eens buiten je vertrouwde woonplaats staan?
Probeer dan eens (een deel van) deze route te begaan!

Laten we beginnen in Oegstgeest,
Ben je daar al ooit eens geweest?
Breng er een bezoek aan het winkelcentrum Lange Voort.
Na een eventueel bezoek aan Corpus, ga je iets meer naar het noord,
Om uit te komen in het mooie Julianadorp aan Zee,
Neem een kijkje op de strandpaviljoens, en pik het naaktstrand eventueel mee¹.
Hierna reis je misschien wel gauw heel wat meer zuid,
En bevind je je opeens in Sint Geertruid.
Na wat interessante historie van de dorpskern snuiven,
Kan je eventueel door naar Duiven,
Wat is dat ver! denk je misschien met terechte agressie,
Maar ja, wat wil je voor een van de weinige overgebleven Nederlandse plaatsen met een processie?
Maak ook vooral een stop in de gemeente Tietjerksteradeel,
Met zestien dorpen beleef je daar gegarandeerd erg veel.
Naar de volgende stop, heb je hopelijk weinig last van druk verkeer,
En arriveer je met een beetje geluk snel in Boxmeer.
Ik hoop dat je de Brabantse gezelligheid goed in je hebt opgenomen,
Want de volgende plaats zal voelen alsof je van een koude kermis bent thuisgekomen.
Misschien heb je het al geraden, ik heb het over Almere Stad,
Sjongejonge wat is dat voor een deprimerend gat.
Na kort een blik te hebben geworpen op het Weerwater,
Vertrek je graag naar Drenthe, liever eerder dan later.
In Grolloo, wat *het groene bos* betekent,
Is genoeg te doen, vanzelfsprekend!
Voel je in de Berenkuil helemaal een met de natuur,
Maar onthoud wel, je moet verder met je avontuur!
De volgende stop zou Nieuwegein kunnen zijn,
Voor sommigen is dit misschien bekend terrein,
Wist je dan ook dat er een partnerstad relatie met de stad Rundu in Namibië bestaat?
Ga maar snel door naar Radewijk, voordat je dat vertrouwen schaaft.
Kijk hier bijvoorbeeld rond in de korenmolen genaamd Windlust,
En reis gauw door naar het noorden als je nog niet bent uitgeblust.
Maak een stop in het pittoreske Roodeschool,
In het bijna noordelijkste plaatsje van Nederland beleef je vast veel jool.
Om deze reis tot een einde te brengen moet je alleen nog even naar Kamperland,
Want, ja, ook de provincie Zeeland blijft relevant.
Na lekker uitgewaaid te hebben op het strand met een windje in de rug,
Kan je dan moe, maar tevreden, naar je vertrouwde huis terug,
Hopelijk zal je genieten van deze plaatsen in het Nederlandse paradijs,
Ik neem je mee, ik neem je mee op reis.

¹Yes pun intended.

De Kwantumroutes van de Padintegraal

Interessante fysica of alleen een wiskundig trucje?

Simon Vos

De padintegraal is een wiskundig object, ontwikkeld als gereedschap voor de kwantumfysica in het begin van de twintigste eeuw en later verder uitgewerkt door de (naar mijn mening) legendarische Richard Feynman. Het heeft een revolutionaire rol gehad in de ontwikkeling van de moderne theoretische natuurkunde, maar heeft inmiddels ook al toepassingen gehad in onder meer de wetenschap van polymeren en zelfs de econometrie. Als theoretisch natuurkundige houd ik me echter liever niet bezig met deze laatste soort echte-wereld-problemen. Ik wil het dus vandaag graag hebben over het oorspronkelijke doeleinde van de padintegraal, dat wil zeggen: de fysica. Ikzelf vind dit namelijk een heel interessant object, natuurlijk omdat het wiskundig leuk is en veel oplossingen biedt, maar als je goed kijkt zijn er ook veel fysische implicaties die je misschien niet verwacht en waar misschien nog veel over te discussiëren valt. In dit artikel deel ik graag mijn kijk op deze dingen en hoop ik je misschien zelfs iets te leren.

De lezers van dit artikel kunnen hoogstwaarschijnlijk in twee categorieën worden geplaatst: mensen die al wel weten wat een padintegraal is en mensen die dat nog niet weten. Nu kan ik gewoon heel wat lastige formules in dit artikel plaatsen, hopend dat de meeste mensen uit de tweede categorie daarmee worden weggejaagd, zodat ik direct naar de punchline kan gaan, maar dat ga ik niet doen (of in ieder geval ga ik dat *proberen* niet te doen). Daarom moet ik eerst even vertellen wat een padintegraal is.

Wat is een padintegraal?

Het idee is eigenlijk heel simpel. Bij een normale integraal is er altijd één variabele, zeg t , waarover je integreert. Je integreert van een initiële waarde t_i tot een eindwaarde t_f (die we respectievelijk ook als $-\infty$ en ∞ kunnen nemen). We passen deze operatie toe op een functie f . Daar komt dan een getal uit wat we noteren met¹

$$\int_{t_i}^{t_f} dt f(t).$$

De stap naar een padintegraal is dan intuïtief snel gemaakt. In plaats van een variabele t waar je over integreert, integreer je over alle mogelijke *functies* f . De notatie verandert dan iets. De letter d in de maat dt wordt veranderd in een gecaligrafeerde hoofdletter $\mathcal{D}$ om padintegratie weer te geven. Als we over een functievariabele f integreren, dan wordt de maat genoteerd met $\mathcal{D}f$. De integrand verandert

dan ook: wat bij gewone getallen een functie is, komt bij functies overeen met een *functionaal*. Een functionaal $\mathcal{O}$ is namelijk een ‘functie’ die functies omzet in getallen. De meest algemene padintegraal wordt dan genoteerd met

$$\int \mathcal{D}f \mathcal{O}[f].$$

De blokhaken worden gebruikt in de context van functionalen. Er worden verder geen integratiegrenzen genoteerd, omdat uit de context duidelijk is dat over alle functies wordt geïntegreerd.

Padintegralen uitrekenen

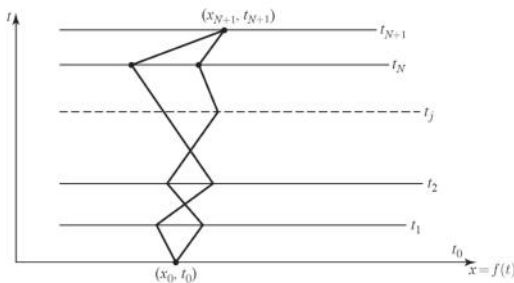
Hoewel de intuïtie duidelijk is, kan je hieruit totaal niet afleiden hoe je een padintegraal uitrekent. Een algemene lijst met regels hiervoor zal ik je niet kunnen geven in dit artikel. Het uitrekenen van padintegralen is namelijk buitengewoon lastig. Een enkele integraal van een bepaalde functie is al snel divergent, bijvoorbeeld als je van $-\infty$ naar ∞ integreert. Het integreren over alle functies klinkt daarom ook gevaarlijk divergent. Hoe dealen we met dit soort extreem divergente objecten, en bovenal, hoe halen we hier fysische observaties uit?

Het divergentieprobleem lossen we op zoals vrijwel elke volwassen en onvolwassen natuurkundige zou doen: met de ene hand schrijven we de formules op en de andere hand leggen we voor onze ogen

¹Bij deze zeg ik graag sorry tegen alle integratiepuristen die hun maat dt liever áchter de integrand $f(t)$ zetten. Ikzelf zou dit in dit specifieke geval denk ik ook doen, maar in de meeste gevallen waar de integrand veel langer en ingewikkelder is, wordt het vaak handiger om meteen om te weten waarover je integreert, en daarom zet men de maat vaak vooraan. Bovenal, in de context van padintegratie heb ik de maat werkelijkwaar nog nóóit achteraan gezien, dus wen er maar alvast aan.

zodat we de divergenties niet zien. Kortom, we negeren dat veel uitdrukkingen divergent zijn. Als we dan op een gegeven moment niet meer verder komen, halen we een veger over alle formules die alle divergente delen wegveegt. In dit artikel heb ik niet genoeg ruimte om dit concreet te laten zien (wellicht materiaal voor een deel ??), dus ik kan je nu even niks beters geven dan mijn belofte dat het werkt en dat met dit soort mechanismen de beste natuurkundige voorspellingen zijn gedaan (we hebben het Higgsdeeltje gevonden nota bene). Ik wil nu verder met hoe we rekenen met dit soort objecten.

Of nouja, we kunnen het dus niet altijd echt berekenen, maar om te begrijpen wat een padintegraal nou *echt* is, kunnen we wel kijken naar hoe dit gerelateerd is aan de normale integraal. Dat brengt ons naar een wat concretere definitie van de padintegraal, namelijk die via *discretisatie*. Het idee hiervan, visueel ook weergegeven in Figuur 1, is om het domein $[t_i, t_f]$ op te delen in infinitesimale deelintervallen $[t_j, t_{j+1}]$ voor $j \in \{0, \dots, N\}$, waarbij $t_0 = t_i$, $t_{N+1} = t_f$ en $t_{j+1} = t_j + \epsilon$ voor alle $j \in \{0, \dots, N\}$ met $\epsilon \in \mathbb{R}$ een klein getal (i.e. in de limiet gaat $\epsilon \rightarrow 0$). Zoals later binnen de fysische context wellicht duidelijker wordt, nemen we aan dat de functies die we beschouwen allemaal dezelfde waarde aannemen op t_i en t_f . Het 'integreren over alle functies f' van deze soort komt dus neer op alle $f_j = f(t_j)$ (normaal) te integreren over alle waarden in $\mathbb{R}$.



Figuur 1 Visualisatie van de definitie van een padintegraal via discretisatie. Door je interval op te delen in deelintervallen en elk deel te integreren over elke mogelijke waarden, integreer je in feite over alle functies, waarvan er in de figuur twee gerealiseerd zijn. Figuur bewerkt van [2].

Het resultaat kan dan weergegeven worden als een formule die de padintegraal definieert als:

$$\int \mathcal{D}f = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[\mathcal{N}(N, \epsilon) \prod_{j=1}^N \left(\int df_j \right) \right],$$

waarbij de integratiegrenzen $-\infty$ en ∞ van de normale integratie vaak worden weggelaten. Hierbij hangt de zojuist gedefinieerde proportionaliteitsconstante $\mathcal{N}(N, \epsilon)$ af van de context van de padintegraal. In de fysische context van de padintegraal in de kwantummechanica, kan deze berekend worden, waarna het uiteindelijk gegeven wordt door (zie [3]):

$$\mathcal{N}(N, \epsilon) = \left(\frac{-im}{2\pi\hbar\epsilon} \right)^{N/2}.$$

Hierbij is m de massa die ook voorkomt in de Schrödinger vergelijking, $\hbar = h/2\pi$ de gereduceerde constante van Planck en $i = \sqrt{-1}$. Waar dit allemaal vandaan komt, is af te leiden uit de fysische formule waar de padintegraal in voorkomt. Ik ga er vanuit dat het idee van de padintegraal nu duidelijk is. Omdat ik na al deze formules zonder directe fysica inmiddels ook al een beetje hongerig geworden ben naar wat fysische voorbeelden, ga ik nu door naar wat echte natuurkunde waar we dit gebruiken.

De natuurkunde

We beginnen bij een kwantummechanische grootheid die centraal staat bij het introduceren van de padintegraal, namelijk de zogeheten transitie amplitude $\langle q_i, t_i | q_f, t_f \rangle$. Als je deze waarde hebt, dan geeft $|\langle q_i, t_i | q_f, t_f \rangle|^2$ de kans dat een kwantumdeeltje zich op een initiële tijd t_i op de locatie q_i bevindt, en op de eindtijd t_f op de locatie q_f bevindt. Hiermee kan je dus voorspellen hoe een kwantumdeeltje zich kan gedragen, waarmee al snel duidelijk is waarom dit een belangrijk object is. Hoe berekenen we dit object?

Hiervoor gebruiken we wat trucjes uit de kwantummechanica. Eerst gebruiken we de zogeheten tijdsevolutieoperator die vertelt hoe een kwantumtoestand zich zal evolueren na een tijd t . We kijken naar de Schrödinger vergelijking

$$H|\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle.$$

We kunnen met kennis van differentiaalvergelijkingen de tijdsevolutie van een kwantumstaat $|\psi\rangle$ berekenen met behulp van de Hamiltoniaan operator H . De oplossing van deze differentiaalvergelijking kan namelijk abstract weergegeven worden als:

$$|\psi, t\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}Ht\right\}|\psi, t=0\rangle.$$

De exponentiële operator in deze expressie wordt dan ook wel de tijdsevolutieoperator genoemd. De transitieamplitude kan dan geschreven worden als

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \langle q_f | \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}H(t_f - t_i)\right\} | q_i \rangle.$$

De volgende trucjes zouden deze formule opsplitsen door veel integralen toe te voegen, waarna de padintegraalvorm zal verschijnen.

De meest standaard teksten over kwantumveldentheorie zouden deze route verder bewandelen. Ik wil hier echter even een andere wending nemen door op te merken dat de tijdsevolutie van de golf functie beschreven wordt door een complexe e -macht. Wat in de context van golven altijd een faseverschil $\Delta\varphi$ aan je golf toevoegt, krijgt hier de vorm $e^{i\Delta\varphi} = e^{iH(t_i - t_f)/\hbar}$. Dus, als een deeltje een deel Δx van een bepaald pad in een stukje tijd Δt doorloopt, dan vangt de golf functie een beetje faseverschil $\Delta\varphi$ op, wat de transitie amplitude hierboven verandert. Als we het deeltje als een golf zien, dan weten we vanuit onze kennis van golven dat we de dat faseverschil kunnen schrijven als

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x - 2\pi f \Delta t.$$

Nu kunnen we de meest fundamentele kwantumvergelijkingen gebruiken die de golf weer linken aan een deeltje: de golflengte van De Broglie, $\lambda = h/mv$ met $v = \dot{q} = dq/dt$, en de energie $E = hf$. Bovenstaande formule verandert dan in

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi mv}{h} \Delta x - \frac{2\pi E}{h} \Delta t = \frac{1}{\hbar} [m\dot{q}^2 - E] \Delta t,$$

waar we $v = \Delta x/\Delta t$ nemen en $\hbar = h/2\pi$. Als we nu de totale energie E schrijven als de som van de kinetische energie $T = m\dot{q}^2/2$ en de potentiële energie V , kunnen we dit schrijven als

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\hbar} \left[\frac{1}{2} m\dot{q}^2 - V \right] \Delta t = \frac{1}{\hbar} [T - V] \Delta t = \frac{1}{\hbar} L \Delta t,$$

waar het verschil tussen de kinetische en potentiële energie $L = T - V$ bekend staat als de Lagrangiaan. Nu moeten we alleen nog alle stukjes van het pad bij elkaar optellen, zodat we de amplitude van het hele pad hebben, en door de limiet $\Delta t \rightarrow 0$ te nemen, kunnen we deze som veranderen in een normale integraal, dus

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle_{\text{één pad}} = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt L \right\}.$$

Nu komt dan eindelijk de padintegraal weer kijken. Om de totale transitieamplitude te weten om de kans te kunnen berekenen dat het deeltje van de beginpositie naar de eindpositie beweegt, moeten we de bijdrage van elk pad bij elkaar optellen. Oftewel, we moeten integreren over alle paden, wat precies de padintegraal is:

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt L[q(t), \dot{q}(t)] \right\}.$$

Hoewel ik hier kan stoppen, aangezien dit al een heel bijzonder resultaat is die alle kwantummechanische effecten van een deeltje samenvat in een tamelijk compacte formule die gebruik maakt van de padintegraal (wauw!), kan ik het niet laten om nog één grote stap te doen. De padintegraal wordt namelijk het meest gebruikt in kwantumveldentheorie. Het enige verschil dan is dat normale golf functies van de positie q veranderen in kwantumvelden ϕ . Wat dit precies zijn, is een heel apart artikel waard en meerdere vakken in je natuurkundemaster, maar de punchline is dat we de wereld kunnen beschrijven met velden met kwantumeigenschappen, en de belangrijke bijbehorende padintegraal-formule heeft exact dezelfde vorm als hierboven, namelijk:

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}[\phi] \right\}.$$

Sorry voor de haters van statistische fysica, maar deze Z in de context van kwantumveldentheorie, staat ook wel bekend als de *partitiefunctie*, en omvat alle kwantumeffecten van een kwantumveld ϕ . Dit is de reden waarom huidige natuurkundigen zo wild worden van het zoeken naar Lagrangianen (of eigenlijk: Lagrangiaandichtheden). Met het vinden van de Lagrangiaan vind je ook meteen alle kwantummechanische verschijnselen van je theorie.

Ik zou zo nog eeuwig door kunnen gaan, maar misschien is het ook goed om nog even te reflecteren op wat we nu allemaal hebben opgeschreven. In de kwantummechanica willen we graag weten wat de kans is dat een deeltje van A naar B beweegt. Dit doen we door de amplitude te berekenen van een bepaald pad, waarna de padintegraal al deze amplitudes bij elkaar optelt om zo de totale kans te weten. In die context is het gebruik van de padintegraal simpelweg een middel om de totale kans te berekenen. Echter, sommige mensen gaan verder in de interpretatie. Zo is bovenstaande afleiding met faseverschillen en dergelijke geïnspireerd door een filmpje van Veritasium [1], maar zij maken ook een ander veelzeggend statement.

Veritasium suggereert in de video [1], net zoals vele anderen, dat het integreren over alle paden niet alleen een wiskundig trucje is om de kans te berekenen, maar dat het deeltje daadwerkelijk alle paden in de ruimte verkent. Wat we beschouwen als het enige echte pad dat afgelegd wordt, zeg door het zien van een lichtstraal, is dan puur en alleen een resultaat van constructieve interferentie van de fase wanneer de actie (de integraal van de Lagrangiaan, die ook in onze padintegraalformule voorkomt) wordt geminimaliseerd.

Dit laatste wordt in de video zelfs experimenteel onderbouwd. Door een laserpointer onder een hoek naar een oppervlak te sturen, wordt op het oppervlak uiteraard een stip geprojecteerd. Echter, door ook een soort folie, dat als een rooster voor licht werkt, direct onder de laserpointer te leggen, ontstaat er wonderbaarlijk genoeg ook een punt direct op dit folie. Dit resultaat is ook weergegeven in Figuur 2.

Hoewel dit natuurlijk een heel mooi experiment is dat het gedrag van licht mooi beschrijft, ben ik zelf ietwat kritisch over de conclusie die getrokken wordt, namelijk dat elk lichtdeeltje elk pad door-

loopt. Natuurlijk wordt het licht zelf in elke richting weggezonden (zelfs een laser is geen perfecte gelokaliseerde lichtstraal) waardoor je ook dit effect ziet, maar dat bewijst naar mijn mening niet dat één foton zowel het ene als het ander lichtpunt veroorzaakt. Begrijp me niet verkeerd, ook individuele fotonen vertonen bijzonder gedrag dat hier een rol speelt en wat de padintegraal zo mooi weergeeft, maar we moeten het verschil tussen wiskundige ruimte ('configuration space') niet verwarren met de echte fysische ruimte ('real space'), wat Curt Jaimungal in zijn video [2] heel mooi uitlegt die mijn mening deelt.



Figuur 2 Een frame van [1] waar men experimenteel onderbouwt dat lichtdeeltjes meerdere paden tegelijkertijd doorlopen. De tweede stip staat bij de ietwat misplaatste pijl.

Kortom, de padintegraal is een fantastisch wiskundig object, waar ik nog veel meer over zou willen praten. Het maakt heel wat lastige natuurkundige effecten heel makkelijk weer te geven in compacte formules, die uiteindelijk ook de grondlegging vormen voor Feynman-diagrammen en alle processen die daarin gebeuren. Het vertelt ook dat we elk mogelijk pad dat een deeltje af kan leggen, moeten meenemen in onze berekening. En hoewel dit misschien niet betekent dat elk deeltje ook daadwerkelijk elk pad doorloopt, is het feit dat zelfs de meest extreme paden belangrijk zijn voor kwantumberekeningen van een deeltje, misschien alleen al wat de padintegraal zo bijzonder maakt.

Bibliografie

[1] <https://www.youtube.com/watch?v=qJZ1Ez28C-A>

[2] <https://youtu.be/XcY3ZtgYis0?si=dpKs8eC42IboM0FW>

[3] Gürsoy, U. (2024, september). Lecture notes on Quantum Field Theory.

[4] Sakurai, J. J., & Napolitano, J. (2020). Modern Quantum Mechanics (3rd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

How to vind de weg (MET PLAATJES!!!)

Margo van Assenbergh

Soms ben je in het leven even de weg kwijt, of ben je gewoon een sjaars die voor het eerst van het Science Park naar de Poema probeert te fietsen. Dus de volgende keer als je denkt een zijstraatje te nemen tijdens het fietsen waardoor je misschien net wel op tijd bent bij college, maar dan ineens niet meer weet waar je bent, volg dan de stappen van dit artikel.

Stap 1: Denk na



Ook al denk je misschien 'het is nu toch al te laat', het is nooit verkeerd om even goed na te denken. Leg je wijsvingers op de zijkanten van je voorhoofd (ook wel je slapen) en sluit je ogen. Nu kan het denken beginnen. Het is belangrijk om je al afgelegde route na te gaan in je hoofd. Probeer vast te stellen waar je voor het laatst de weg nog *wel* wist.

Stap 2: Acceptatie



Nu je hebt vastgesteld vanaf welk punt je de weg kwijt bent geraakt, zijn er twee mogelijkheden. Of je weet de weg nog terug naar dat punt, of je weet niet meer hoe je daar komt. Als dat eerste het geval is, dan hoeft je dit artikel niet te lezen want dat weet je prima hoe je de weg moet vinden. Stel je weet de weg niet meer terug tot dat punt, dan is het tijd om te accepteren dat je de weg echt kwijt bent.

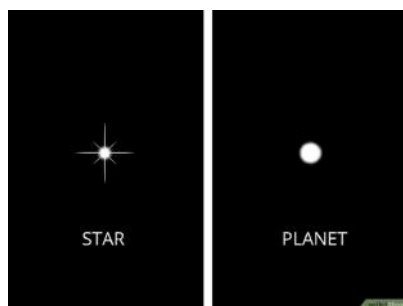
Stap 3: Wachten

De volgende stap is wachten totdat het donker wordt. Het moet namelijk donker zijn om de sterren te zien. Stel het is bewolkt, dan is het verstandig om

een andere *wikiHow* te lezen, namelijk: 'How to zet op een kamp om de nacht door te brengen'. Zo kan je wachten tot de volgende nacht voorbij is en dan weer proberen om naar de sterren te kijken! Een ander voordeel van wachten tot het donker is, is dat je dan ook de lichtgevende Domtoren kan zien en het is makkelijk om jezelf te navigeren met behulp van de Domtoren.



Stap 4: Het noorden vinden met behulp van de sterren



Probeer dan nu de Noordster te vinden. Maar let op: een ster en een planeet zijn twee verschillende dingen, maar zijn wel allebei in de hemel te vinden. Er bestaat ook geen Noordplaneet, dus probeer echt de Noordster te vinden. Hiermee kan je de weg naar het noorden vinden. Zolang je richting het noorden loopt, kom je op een gegeven moment bij een strand uit. Als je dan linksaf slaat en blijft lopen, dan kom je vanzelf uit bij een strand waar je de weg kan vragen.

Heb jij de route gevonden?

Sudoku oplossing

Lara Timmers

	3	1	2	4				5			
→	9	4	•	8	3	7	5	6	2	•	1
	3	7	>	5	1	6	2	8	•	4	9
	•	6	2	•	1	4	9	8	5	7	3
	1	8	2	•	9	3	4	7	5	∨	•
	4	6	9	7	5	1	3	8	2	•	4
	7	5	3	8	2	6	9	1	4	•	5
	8	3	7	2	•	4	9	1	6	5	2
	2	•	1	6	5	8	3	4	9	7	•
	5	9	4	6	1	7	2	•	3	8	2
					↑						

QQQ: Quirijns Queens Qwebbelen

Emma Scheepstra

A-Eskwadraters zijn groot fan van het maken van puzzels en dan met name ingewikkelde puzzels. Als ik daarentegen iets leuk vind, is het wel puzzelen zonder al te veel na te hoeven denken. Ook wel geschreven als: 'Ik houd van woordzoekers'. De beste woordzoekers zijn de woordzoekers waar je ook nog iets van kan leren, beter bekend als de Verhaalwoordzoekers. Alle gemarkeerde woorden die je hieronder ziet, zijn te vinden in de woordzoeker. De overgebleven letters in de woordzoeker vormen daarna een leuke boodschap.

De eerste woordzoeker komt al uit de jaren 60 en had toen de naam 'lettersoep', maar dan in het Spaans. Er zijn ook veel andere woordzoekers die als DE eerste woordzoeker gezien worden, maar die hadden niet zo'n leuke naam als deze woordzoeker. Deze woordzoekers verdienen het dan ook niet om DE eerste woordzoeker genoemd te worden. Hierna zijn er nog vele woordzoekers gemaakt en ook veel verschillende varianten op de markt verschenen. Zo hebben puzzelboekjes al snel vijftien soorten puzzels per boekje. De beste puzzel is natuurlijk de miljoenenzoeker. Hier worden getallen in plaats van letters weggestreept¹. Mocht dit niet jouw ding zijn, dan hebben ze ook veel taalgerichte woordzoekers. Denk hierbij aan kruiswoordzoekers, anagramzoekers of tegenstellingzoekers.



Woordzoekers zijn er dus in alle soorten, maar zijn er ook voor alle niveaus. Zo bestaan er sinds kort niveau 5 puzzels waar het woordzoeken niet altijd voor de hand ligt. Deze liggen helaas nog niet in

de Nederlandse winkels, maar zijn wel via de website van Denksport al te bestellen. Verder is deze puzzelvorm ook mogelijk om met twee mensen te maken. Daar bedoel ik niet mee dat je samen op zoek gaat in dezelfde puzzel. Je krijgt beide een eigen raster met letters maar deelt een woordenlijst. Je weet nu niet in welk raster je welk woord gaat kunnen vinden. Beide vakken hebben ook nog eens hun eigen eindoplossing. Zelf heb ik dit nog nooit geprobeerd, maar mocht dit je leuk lijken ben ik er zeker voor in!

Woordzoekers zijn er in alle soorten en niveaus, maar ook in maten. Wist je dat de grootste woordzoeker maar liefst 10.500 woorden bevat in een letterveld van meer dan 129.600 letters? De maker was de Indische professor Ashish Dutt Sharma die tien jaar heeft gedaan over het maken van deze puzzel. De woordzoeker zat vol technische vaktaal en namen van bekende wetenschappers en ontdekkers. Zo hoopte de professor zijn studenten deze vaktaal en namen bij te brengen. Best wel cool dus!

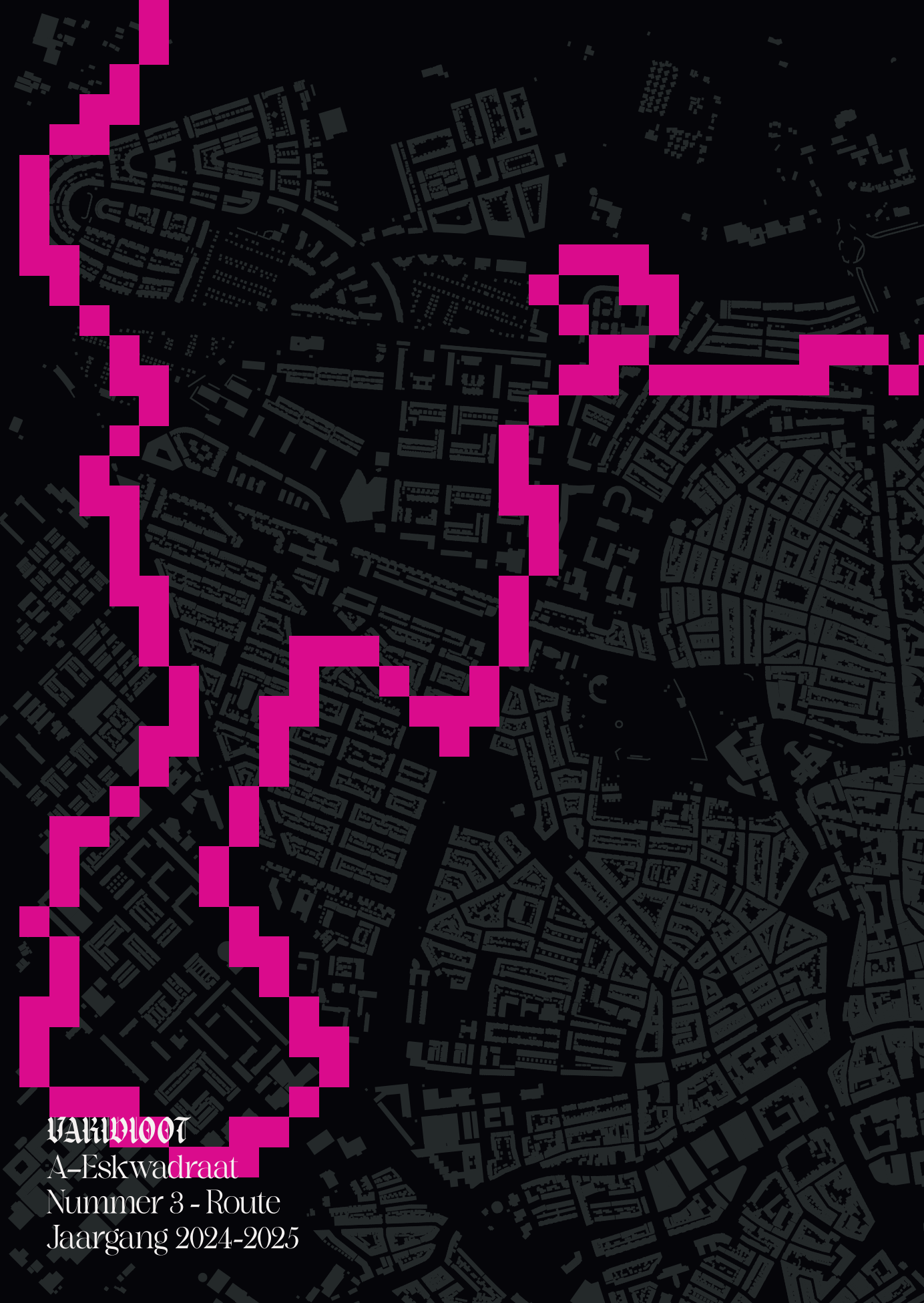
Dit artikel was in eerste instantie bedoeld als informatief artikel over woordzoekers. Maar gedurende het schrijven werd het steeds meer een promotie voor woordzoekers. Dat is voor deze puzzelsoort niet meer dan terecht. Ik ga er dan ook van uit dat jullie overtuigd zijn om zelf deze puzzel weer eens te maken. Mocht je zelf niet zo'n boekje hebben, dan kan je een abonnement nemen op veel verschillende soorten woordzoeker puzzelboekjes. Zo kun je bij Denksport 37 verschillende boekjes kopen van diverse merken. Ongeveer iedere maand heb je ook wel weer nieuwe edities. Zelf ben ik dan ook geabonneerd op zowel het 4- als 5-sterrenboekje van Denksport. Ik heb dan ook altijd wel een boekje bij me, vraag hier vooral naar als je zin hebt om een woordzoeker te maken!

¹Niet zo gek dus dat dit de favoriete puzzel is van de penningmeester.

Woordzoeker

T	N	E	M	E	N	N	O	B	A	M	R	O	V	L	E	Z	Z	U	P	
W	E	D	I	T	I	E	S	T	R	O	O	S	L	E	Z	Z	U	P	D	
O	O	G	V	T	W	I	N	K	E	L	S	I	J	S	A	A	L	E	H	
O	T	O	E	H	N	E	K	K	A	V	R	K	V	I	J	F	T	I	E	N
R	T	W	R	N	I	A	S	E	J	K	E	O	B	L	E	Z	Z	U	P	
D	E	O	D	D	S	E	T	L	D	O	P	M	A	K	E	R	M	E	K	
E	A	O	I	S	Z	T	R	S	B	N	P	U	A	E	V	I	N	I	J	E
N	N	R	E	R	D	O	E	N	N	A	A	M	T	Z	L	N	L	D	G	
T	A	D	N	E	T	L	E	L	A	I	H	H	I	J	I	E	D	R	A	
P	G	E	E	K	W	R	E	K	L	D	C	N	O	N	G	T	R	E	L	
E	R	N	N	K	R	T	R	V	E	I	S	E	G	O	E	N	E	E	E	
E	A	L	L	E	S	A	N	N	R	R	N	M	M	M	T	A	E	B	T	
R	M	I	J	T	D	S	E	K	E	N	E	E	G	A	S	A	I	N	O	T
T	Z	S	T	T	D	S	G	E	N	E	T	T	Z	C	L	R	N	R	E	
S	O	T	E	N	P	L	V	Z	S	U	E	T	D	O	L	A	O	P	R	
E	E	R	I	O	A	I	O	T	E	N	W	R	E	O	E	V	B	E	S	
G	K	V	R	A	R	E	E	S	R	E	T	T	E	L	N	K	A	G	O	
G	E	T	T	H	K	R	E	I	N	F	O	R	M	A	T	I	E	F	E	
E	R	N	C	E	I	N	D	O	P	L	O	S	S	I	N	G	G	R	P	
W	S	S	R	E	K	E	O	Z	D	R	O	O	W	S	I	U	R	K	S	

Oplossing:



WAKW1007

A-Eskwadraat

Nummer 3 - Route

Jaargang 2024-2025