VAKIDIOOT

Studievereniging A–Eskwadraat Jaargang 15/16 Nummer 5

In dit nummer

Uitgave 30 mei 2016
Oplage 1455
Deadline 12 juni 2016

De Vakidioot is een uitgave van
Studievereniging A–Eskwadraat
Princetonplein 5
3584 CC Utrecht

Telefoon (030) 253 4499
Fax (030) 253 5787
Website a-eskwadraat.nl/vakid
E-mail vakid@a-eskwadraat.nl

Wil je de Vakidioot niet meer ontvangen of ben je verhuisd? Pas dan je gegevens aan op a-eskwadraat.nl.

Redactie
Berend Ringeling
Bryan Brouwer
Chun Fei Lung
Jim Vollebregt
Koen van Baarsen
Marc Houben
Tim Baanen

Eindredactie
Babette de Wolff

Redactioneel

Volgens mij is het een soort regel dat namen van vakken altijd net wat te lang zijn voor frequent gebruik. Omdat iedereen in de collegebanken vaak toch wel snapt wat je bedoelt en niemand eigenlijk zin heeft om die lange vaknaam de hele tijd uit te spreken, zijn afkortingen niet ongewoon (en nee, dan bedoel ik niet afkortigen als in WISB212, al is dat bij sommigen ook populair). Zo wordt het vak 'Inleiding Topologie' al snel afgekort tot 'Topologie' en daarna tot 'Topo'. Dit laatste zorgt bij niet-wiskundigen wel eens voor verwarring: je studeert toch wiskunde en geen aardrijkskunde? Waarom wil je dan weten waar plaatsen liggen?

Hoewel Inleiding Topologie over ruimtes gaat, kan het vak je inderdaad niet vertellen waar bepaalde plaatsen liggen – volgens mij zijn er vrij weinig takken van de wiskunde die dat kunnen. Toch is er een apparaat dat je je route kan vertellen en waarin alle studies van onze vereniging samenkomen: het navigatiesysteem.

Omdat signalen tussen je navigatiesysteem en satellieten met hoge snelheid worden uitgewisseld, heb je relativiteitstheorie nodig om je berekeningen goed uit te voeren. Voor het berekenen van de plek waar je bent en de optimale route naar je bestemming heb je informatica en wiskunde nodig. En om het apparaat gebruiksvriendelijk te houden, komt de kennis van informatiekundigen over user interfaces goed van pas.

Mocht iemand je nog een keer vragen wat al die bèta's bij A–Eskwadraat nou zoal uitspoken: je de goede kant op sturen dus.

Babette de Wolff
Eindredacteur

Van de Voorzitter

Harm Backx

De wiskundigen onder ons hebben het makkelijkste leven van allemaal: zij (ik kan ook zeggen wij) leven gedurende hun hele studie in een abstracte wereld waar hun eigen regels gelden. Hoewel het pas echt uitgediept is in de afgelopen eeuw, is de wiskunde gebaseerd op precieze axioma's en een precieze definitie van de bewering 'als, dan'. Daarmee kan vrijwel alles zwart-wit aangemerkt worden als 'waar' of 'niet waar'. Er is maar één waarheid en als iemand het niet eens is met jouw waarheid, dan heeft diegene andere axioma's gebruikt of één van jullie beiden een fout gemaakt; shit happens.

Voor de informatici geldt ongeveer net zoiets. Ze houden zich bezig met een door mensen gebouwde wereld en iets werkt goed of het werkt niet. Als exact dezelfde code bij de ene wel werkt en bij de ander niet, heeft iemand een out-dated versie van welk programma dan ook op zijn laptop staan. Again, shit happens.

De natuurkundigen hebben het alweer een stuk moeilijker: zij zoeken naar de waarheid. Het bestaan van het Higgsdeeltje of zwaartekrachtsgolven bijvoorbeeld: ze bestaan of wel of niet natuurlijk. Maar hier kom je al snel bij onderwerpen waaraan nog steeds filosofen hun leven wijden: wanneer is een meting een meting? Waarom zou de natuur zich regelmatig gedragen? De zaken waar een natuurkundige vanuit gaat in deze zoektocht naar 'de waarheid' zijn niet vanzelfsprekend.

Maar de mensen die het echt moeilijk hebben studeren informatiekunde. Stel je moet onderzoeken of je app die het slaapritme van mensen coacht werkt, dan moet je werken met mensen. Dat is een omgeving waar nauwelijks meer getracht kan worden te zoeken naar een waarheid: wat werkt voor de ene mens, hoeft niet te werken voor de ander en dus heb je alleen zekerheid als de hele wereldbevolking je sample is. Echter zul je dan ook elke 0,23 seconde een nieuwe baby moeten onderzoeken. Tsja, shit happens.

De ziekte van Alzheimer

Elise Ringeling

De ziekte van Alzheimer is de meest voorkomende vorm van dementie. Dementie is een verzamelnaam voor aandoeningen die een stoornis in het verstandelijk vermogen gemeenschappelijk hebben. Bij zo'n 70% van alle gevallen van dementie is er sprake van Alzheimer. In Nederland zijn er op dit moment 200 000 alzheimerpatiënten en naar verwachting zal dit aantal in 2030 verdubbeld zijn. Dit komt door een steeds hoger wordende levensverwachting en de vergrijzing.

De ziekte van Alzheimer is een aandoening van de hersenen waarbij hersencellen in versneld tempo verouderen of aangetast worden en uiteindelijk verloren gaan. Doordat dit proces meestal begint in de hippocampus, een gebied in de hersenen dat belangrijk is voor het geheugen, treedt vergeetachtigheid op. Daarna treden vaak andere klachten op, zoals spraakproblemen en desoriëntatie. De ziekte van Alzheimer kan gezien worden als vervroegde en versnelde veroudering van de hersenen.

De Duitse neuropatholoog en psychiater Aloïs Alzheimer presenteerde in 1907 als eerste de ziekte van Alzheimer. Hij raakte gebiologeerd door het vreemde gedrag en geheugenverlies van zijn 51-jarige patiënte. Zij had last van cognitieve stoornissen, depressies en hallucinaties. Na haar dood werd autopsie verricht en het onderzoek toonde aan dat de hersenen van de patiënte gedeeltelijk waren gekrompen. Tevens werden eiwitophopingen en kluwen vezels in haar hersenen gevonden. Door deze doorbraak werd de ziekte vernoemd naar zijn ontdekker.

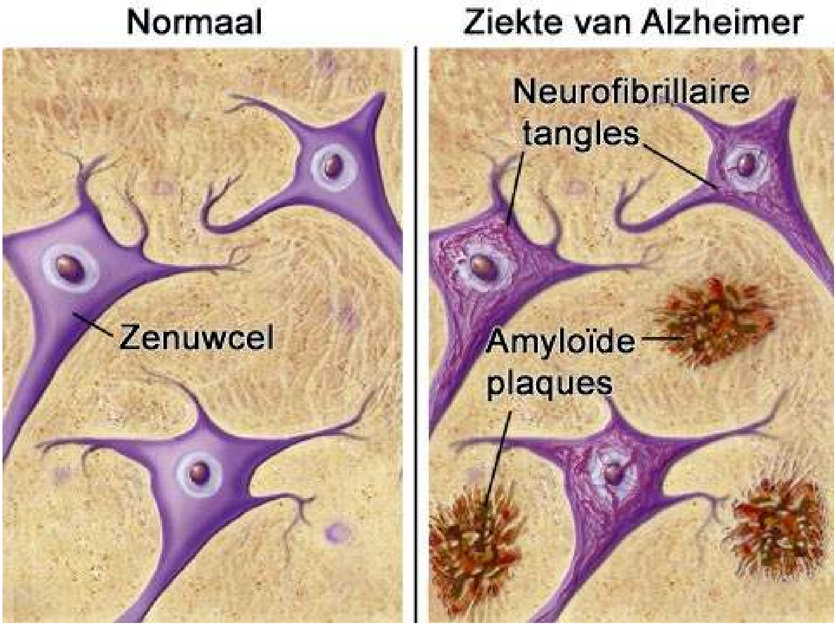
Aloïs Alzheimer, de ontdekker van de ziekte van Alzheimer.

Het mechanisme

De verandering in de hersenen vindt plaats door een afname in het aantal zenuwcellen. In de hersenen bevinden zich zeker honderd miljard zenuwcellen. Deze cellen hebben allemaal talrijke verbindingen met andere zenuwcellen. Een grote groep van de zenuwcellen wordt gebruikt voor ons geheugen. Het is normaal dat zenuwcellen na verloop van tijd afsterven, en dit heeft verder geen grote gevolgen. In het geval van Alzheimer sterven zenuwcellen echter in een te hoog tempo af. Aangezien zenuwcellen niet worden vervangen, kan dit cognitieve problemen opleveren.

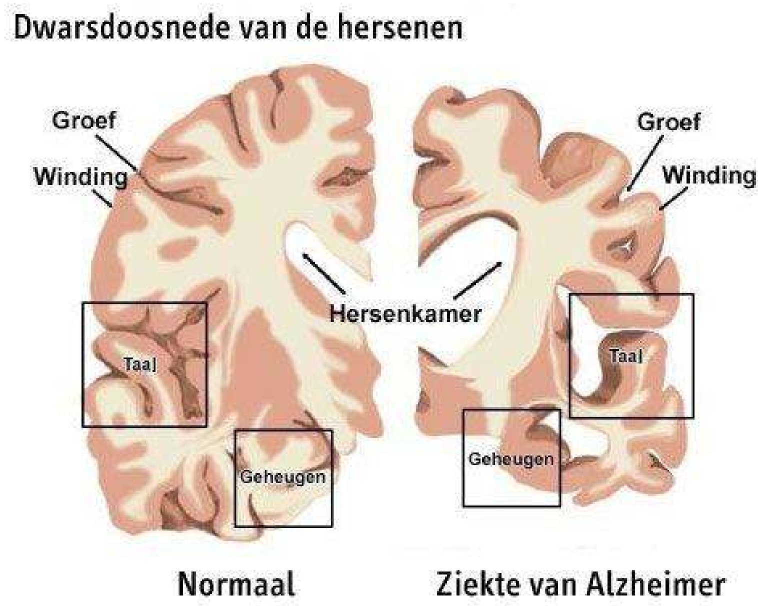
De aantasting van zenuwcellen wordt veroorzaakt door eiwitophopingen en kluwen vezels in de hersenen. De eiwitophopingen, ook wel plaques genoemd, zijn een resultaat van het

abnormaal afbreken van het eiwit Amyloïd. In normale gevallen worden de amyloïd-eiwitten afgebroken en vervolgens opgeruimd, maar bij Alzheimerpatiënten gaat er dus iets mis bij de afbraak, waardoor het afbraakproduct amyloïd-bèta ontstaat. Dit abnormale afbraakproduct kan niet worden opgeruimd en hoopt zich op buiten de cellen.
De kluwen vezels, ook wel tangles genoemd, bevinden zich in de zenuwcellen en worden veroorzaakt door het eiwit tau. Dit eiwit zorgt er normaal gesproken voor dat voedingsstoffen door een zenuwcel worden geleid. Maar bij de ziekte van Alzheimer verstrengelen tau-eiwitten zich, waardoor het vervoer van voedingsstoffen wordt belemmerd.



De gevolgen

De communicatie tussen cellen wordt zowel intra- als extracellulair tegengehouden. Dit zorgt op den duur voor het afsterven van zenuwcellen. De ophopingen van eiwitten zoals hierboven beschreven, zijn op specifieke plaatsen in de hersenen te vinden. De hersenen worden dus plaatselijk aangetast. Het eerste deel van de hersenen dat beschadigt raakt in het verloop van Alzheimer, is de hippocampus. In beide hersenhelften bevindt zich een hippocampus. De hippocampus speelt een cruciale rol in de werking van het geheugen. Nieuw binnengekomen informatie gaat naar de hippocampus, waar de informatie wordt opgeslagen in het kortetermijngeheugen. Doordat de hippocampus als eerste wordt aangetast in het ziekteproces, zijn de eerste symptomen vergeetachtigheid, voornamelijk met betrekking tot recentere gebeurtenissen.
Na verloop van tijd verspreidt de aandoening zich door de hersenen. Er ontstaan dan ook andere symptomen, zoals desoriëntatie en spraakproblemen. Alles wat ooit is aangeleerd wordt op die manier langzaamaan weer afgeleerd.



Gemiddeld krijgt 1 op de 5 mensen een vorm van dementie. Dit is berekend aan de hand van het aantal mensen dat ten tijde van overlijden een vorm van dementie had. 14% van de mannen die overlijden hebben een vorm van dementie, tegenover ruim 30% van de vrouwen. Dit groote verschil is te verklaren door de hogere levensverwachting van vrouwen. Vrouwen worden gemiddeld 83,0 jaar en mannen 79,4 jaar. Hierdoor hebben vrouwen in het algemeen een grotere kans op het ontwikkelen van ouderdomsziektes, en dit geldt ook voor Alzheimer. Hoe ouder iemand wordt, hoe groter de kans is dat de ziekte zich ontwikkelt. Iemand die jonger is dan 60 jaar, heeft minder dan 1% kans op het krijgen van Alzheimer, rond het zeventigste levensjaar is de kans 3 tot 4% en daarna verdubbelt de kans iedere vijf jaar. Aangezien vrouwen ouder worden dan mannen is de kans dus groter dat zij een vorm van dementie krijgen.

De ziekte van Alzheimer is vooralsnog onbehandeld gebleven. Mensen leven gemiddeld acht jaar met deze aandoening, daarna komen ze te overlijden. Er zijn wel geneesmiddelen op de markt die de ziekte langzamer laten verlopen, symptomen bestrijden of de kans op Alzheimer verkleinen. Voordat de medicijnen worden voorgeschreven, moet er met zekerheid worden vastgesteld dat er inderdaad sprake is van Alzheimer. Deze diagnose is niet altijd makkelijk te stellen, omdat bij iedere patiënt de ziekte anders tot uiting komt en daardoor zijn niet alle criteria altijd van toepassing. Door het verschil in ziekteverloop is het moeilijk van te voren te bepalen welke medicijnen een patiënt nodig heeft.

$R + L = J$ of $R + L = D$, $B + A = J$?

Jim Vollebregt

Veel van jullie zullen wel eens gekeken hebben naar de HBO TV-serie Game of Thrones. Als een fervent lezer van de boeken wil ik jullie echter op de hoogte brengen van een paar fan theories. Eén van de meest brandende vragen van de Game of Thrones Fan Theorist is: wie is de moeder van Jon Snow? Daar zal ik proberen een antwoord op te geven. Voor de mensen die alleen de serie hebben gezien is het misschien lastig te volgen, maar zal het niettemin verbazingwekkende inzichten opleveren. Voor de lezers van de boeken moet het makkelijk te begrijpen zijn. Waarschuwing: spoilers, spoilers, spoilers.

De bekendste theorie over de afkomst van 's werelds favoriete bastaard, is dat Rhaegar Targaryen, de zoon van The Mad King Aerys, en Lyanna Stark, de zus van Eddard Stark, de ouders zijn van Jon. In boek 1 van A Song of Ice and Fire is te lezen dat, ongeveer vijftien jaar voor de start van het verhaal, Rhaegar Lyanna heeft ontvoerd en haar heeft opgesloten in The Tower of Joy in Dorne. Eddard gaat samen met Howland Reed, de vader van Jojen en Meera, naar Dorne om zijn zusje te bevrijden. De toren wordt bewaakt door leden van de Kingsguard, wat opvallend is, want op dat moment zou er niemand van het huis Targaryen aanwezig moeten zijn. Eddard en Howland weten de mannen van de Kingsguard te verslaan en Eddard treft Lyanna aan in een bed van bloed. De theorie zegt dat dit het bewijs is dat Lyanna net is bevallen van een baby, en dat het feit dat de Kingsguard daar is, aangeeft dat het gaat om een erfgenaam van de Targaryens. Lyanna sterft daar, maar niet voordat ze fluistert: 'Beloof het me, Ned'. Wat deze belofte inhoudt wordt niet duidelijk, maar volgens de theorie zou Lyanna Eddard hebben gevraagd haar baby, Jon, veilig te houden en te beschermen tegen de mensen die bezig zijn het huis Targaryen omver te werpen.

Dit lijkt misschien ingewikkeld, maar het wordt nog erger. Voor de al te oplettende lezer zitten er wat haken en ogen aan deze theorie. Zo krijgt Eddard, als hij in King's Landing is, een aantal dromen over de belofte aan Lyanna, en hij denkt dat hij die heeft gebroken. Dat zou vreemd zijn, aangezien Jon Snow op de muur is. De enige die hij op dat moment heeft nagelaten te beschermen, is Daenerys. Koning Robert heeft namelijk net op dat moment besloten een moordenaar achter haar aan te sturen. Dus zou het kunnen dat Daenerys het kind van Rhaegar en Lyanna is? Dit lijkt misschien ver gezocht, vooral omdat er bij hoog en laag wordt beweerd dat Rhaegar de bróér van Dany is. Maar het enige wat Dany van haar verleden weet, heeft ze van haar broer Viserys (die gast die gesmolten goud over zijn hoofd gegoten krijgt). Deze lijkt echter niet helemaal oprecht. Dany herinnert zich een huis met een rode deur met een citroenboom voor het raam, en Viserys zegt dat dat huis in Braavos staat, maar Braavos ligt te ver in het noorden voor citroenbomen om er te groeien. Waarom zou hij hierover liegen? Nou, ten eerste heeft Dany als zijn jongere zus minder recht op de Iron Throne dan wanneer ze de dochter van Rhaegar is. Bovendien bestaat er geen twijfel over haar legitieme geboorte als Viserys claimt dat ze de dochter van Aerys is, dus kan hij haar zonder problemen uithuwelijken aan Khal Drogo. Er rest nog een probleem, namelijk wie dan wel de ouders van Jon Snow zijn. Ik wil hier niet te veel meer over uitwijden, maar ik zal verklappen dat Brandon Stark, de oudere broer van Eddard, en Ashara Dayne goede kandidaten zijn. Hiervoor moet er wel een verwisseling van babies hebben plaatsgevonden, Eddard moet gelogen hebben over de leeftijd van Jon, en Ashara moet haar zelfmoord in scène hebben gezet, maar afgezien van deze problemen past het beter in de tijdlijn van Roberts Rebellion.

Wie trouwens denkt dat Jon Snow de “Prince that was Promised” is, zit waarschijnlijk ook op een dwaalspoor. De boeken lijken aan te sturen op de heerschappij van Sansa, mogelijk bijgestaan door Young Griff, een schuilnaam voor Aegon Targaryen, de doodgewaande zoon van Rhaegar en Elia Martel (Ser Gregor Clegane, ofwel The Mountain zou zijn hoofd tegen een muur aan stukken geslagen hebben). Hoewel ook dit een twijfelachtig verhaal is. Het is namelijk zo dat deze Young Griff wordt bijgestaan door het huurlinggezelschap the Golden Company, de meest beruchte tegenstanders van de Targaryens. Bovendien laat Illyrio, één van de grootste intriganten in het boek en de belangrijkste bondgenoot van Young Griff, aan Tyrion weten dat sommige verdragen met inkt worden geschreven en anderen met bloed. Dit duidt erop dat Young Griff mogelijk een Blackfyre is. Maelys the Monsterous was immers eens een bevelhebber van the Golden Company dus ze zouden best Blackfyres willen bijstaan. En the Golden Company gaat ver in hun steun. Er zijn zelfs aanwijzingen dat ze de Faceless Men hebben betaald om Bloodraven (die gast die Bran aan het eind van seizoen 4 ontmoet. Hij is anti-Golden Company, aangezien hij eens de rivaal was van Bittersteel, de oprichter van de huurlingcompagnie) te vermoorden. Dit is waarschijnlijk Jaqen h’ghar’s missie voordat hij Arya ontmoet.

Ter afronding nog een kleine vooruitblik op het volgende seizoen van de TV-serie. Voor de mensen die bang zijn dat Jon Snow dood is; de profetie waar Melisandre (Carice van Houten) het over heeft, over de krijger van vuur enzo, bevat een element over de dood van de uitverkorene door rook en zout. Welnu, die Olly huilt zoute tranen als hij Jon neersteekt, en er branden fakkels waar zeker rook van af komt. Coincidece? I think not.

Voor degene die meer willen weten over waanzinnige Fan Theories (geloof me, dit is nog maar het topje van de ijsberg), kunnen altijd bij mij terecht, of op YouTube bij Preston Jacobs.

Enclaves, exclaves en andere gekke landsgrenzen

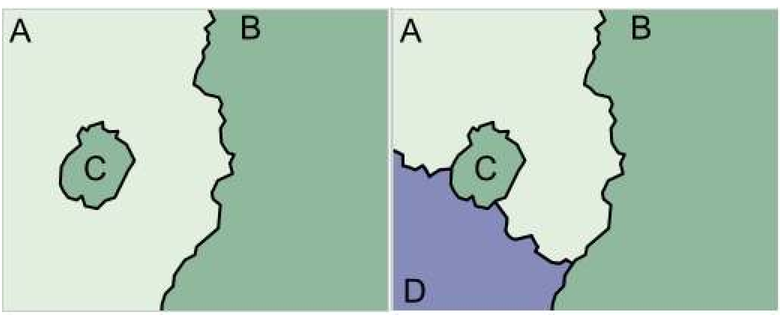
Berend Ringeling

Landsgrenzen zijn over het algemeen erg ingewikkeld. De meeste landsgrenzen (in bijvoorbeeld Europa) worden bepaald door geografische kenmerken, zoals bergen en rivieren. In landen als de Verenigde Staten kent men ook veel kaarsrechte grenzen, zoals de grens bij Mexico. De oorzaak hiervan is dat het Amerikaans grondgebied nog grotendeels onbekend was voor de makers van de grenzen in die tijd. Bij oorlogen worden er regelmatig gebieden "geruild" tussen de landen in conflict, waardoor er eigenaardige landsgrenzen kunnen ontstaan.

Enclaves en Exclaves

De meest vreemde landsgrenzen worden gevormd door zogenaamde enclaves en exclaves. Een gebied C heet een exclave als deze niet "vast" zit aan het moederland. We zeggen dat gebied C een enclave is in A als C volledig omringd wordt door A. Enclaves kunnen zelf ook een land zijn, maar exclaves niet. Enclaves grenzen dus aan precies één land en exclaves grenzen aan minstens één land (zie figuur 1). Als een gebied slechts door één ander land en de zee wordt omringd dan wordt dat gebied geen enclave genoemd. Zo zijn bijvoorbeeld Monaco en de Russische oblast Kaliningrad geen enclaves omdat zij aan de zee grenzen. Daarentegen is Kaliningrad wel een exclave van Rusland omdat Kaliningrad geen zelfstandig land is.

Een bekend voorbeeld van een enclave is het Belgische Baarle-Hertog dat geografisch gezien volledig wordt omringd door Nederland. Na goede bestudering van de kaart van Baarle-Hertog, valt echter op dat er binnen deze enclave gebieden liggen die bij Nederland horen. We spreken hier van een tweede-orde enclave. De grens tussen India en Bangladesh is minstens zo gefragmenteerd. Binnen het moederland Bangladesh bevinden zich 102 Indiase enclaves en binnen deze enclaves bevinden zich nog 21 Bengalese enclaves (dit zijn dus tweede-orde enclaves). Om de verwarring nog groter te maken bestaat er ook een derde-orde enclave in



Figuur 1 *Links is C een enclave in A. Rechts is C een exclave maar geen enclave omdat C zowel door A als door D begrensd wordt.*

Bangladesh. Het Indiase dorp Dahala Khagrabari wordt omringd door het Bengaalse dorp Upanchowki. Dit dorp wordt op zijn beurt weer omringd door het Indiase dorp Balapara Khagrabari. Nu is dit laaste dorp weer een enclave in het Bengalese Rangpur.

Het ontstaan van de enclaves/exclaves heeft het vaakst te maken met een krenterig landjepik. De verwarrende landsgrens in Bangladesh zou volgens de volkslegende ontstaan zijn door een stel schaakspelende regionale koningen. Het is waarschijnlijk dat deze landsgrenzen zijn ontstaan na verschillende oorlogen in het gebied. Omdat binnen enclaves (en zeker bij hogere-orde enclaves) het besturen zeer lastig is, zijn er pogingen gedaan om deze complexe enclavesituaties op te lossen. Echter, dit stuitte vaak op verzet bij de bewoners. Sinds kort (2015) is de Indiase enclave Dahala Khagrabari overgegaan in Bangladesh.

Figuur 2 *De derde-orde enclave tussen Bangladesh en India.*

Vierlandenpunten

Een vierlandenpunt is een punt waaraan vier landen grenzen. Hoewel de drielandenpunten natuurlijk heel vaak voorkomen, is er op dit moment officieel geen vierlandenpunt. Toch bestaan er enkele landen die "bijna"-vierlandenpunt zijn. Zo ligt de grens van Namibië zeer dicht bij het drielandenpunt van Zambia, Zimbabwe en Botswana, maar het heeft geen raakpunt met dit drielandenpunt. In de Verenigde Staten is er wel sprake van een "vierstatenpunt" (dus een punt waar vier staten samen komen) tussen de staten Colorado, Utah, New Mexico en Arizona.

Figuur 3 *Het vierlandenpunt bij Vaals.*

Nederland heeft van 1839 tot 1919 wél een vierlandenpunt gekend, ter hoogte van waar zich nu in Vaals het drielandenpunt bevindt. Na de onafhankelijkheid van België in 1839 vormde het staatje Neutraal Moresnet samen met Pruissen, België en Nederland een vierlandenpunt. Er moet echter wel een kritische kanttekening worden gemaakt door Neutraal Moresnet als land te beschouwen. Dit staatje, met een paar honderd inwoners, kende namelijk geen regering of senaat. In 1919 werd beslist dat dit staatje bij België zou worden gevoegd.

Waar leg je de kromme?

Tim Baanen

In de wiskunde hebben heel eenvoudig te formuleren stellingen meestal de lastigste bewijzen. Carl E. Lindenholm geeft in zijn boek "Mathematics Made Difficult" het voorbeeld dat voor wiskundigen snel duidelijk is dat binnen een hoofdideaaldomein je gegeven een deelverzameling van een ideaal altijd een eindige deelverzameling daarvan kan vinden die generator is van het ideaal, maar bewijzen dat $17 \times 17 = 289$, daar wil niemand aan beginnen.[1] Net zo is het erg lastig te bewijzen dat je een gebied in twee delen kunt opdelen door een grens te trekken.

Toch is het Camille Jordan gelukt om dit te bewijzen. Ten eerste moest hij daarvoor definiëren wat een gebied is, wat een grens is en wat opdelen inhoudt. Toen dat eenmaal gebeurd was, was hij nog niet klaar, want het bewijs is ook nog eens ingewikkeld.

Vertalen naar wiskunde

Het "gebied" waar we in werken is het platte vlak, voor topologen bekend als $\mathbb{R}^2$ met de Euclidische topologie. Dit is het platte vlak waar de oude Grieken[2] ook hun meetkunde op verrichtten. We kunnen de stelling niet zomaar toepassen op echte landsgrenzen, want alle landen van de wereld liggen op de niet-platte wereldbol. Ook lukt het nog niet om te bewijzen dat de muren van je huis ervoor zorgen dat je binnenshuis en buitenshuis hebt, want dat speelt zich in drie dimensies af.

Met een "grens" bedoelen we in dit geval een gesloten kromme, voor topologen bekend als een inbedding, oftewel een continue open injectie, van de cirkel S^1 in het vlak $\mathbb{R}^2$. We vereisen dat de kromme zichzelf niet snijdt, maar wel een lus vormt, waarbij het beginpunt ook het eindpunt is. Ook mag de kromme niet in twee losse lussen uiteen kunnen vallen. Ook hier moeten we nog wat extra werk doen om de stelling praktisch toe te passen. Meestal denk je bij een grens aan een kromme die niet een lus vormt, maar van de ene rand van het gebied naar de andere loopt. Ook heb je in het echt gevallen als enclaves.

Negeren we al die praktische bezwaren, dan kunnen we ten slotte een betekenis geven aan "opdelen". Het idee wat we hierbij hebben, is dat het gebied waar we mee werken in twee losse stukken uiteenvalt als je de grens weghaalt, waarvan één stuk de binnenkant is en het andere stuk de buitenkant. Dat geeft de volgende precieze formulering van de stelling die we gaan bewijzen: als $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ een inbedding is met beeld $C = \gamma\left(S^1\right)$, bestaat $\mathbb{R}^2 \setminus C$ uit twee samenhangende componenten, een begrensde component en een onbegrensde component, en de rand van deze componenten is precies de kromme C. Dit is wat Jordan uiteindelijk bewijst in zijn stelling, die geheel ontoevallig de stelling van Jordan genoemd wordt.[3]

[1] **DOE-TIP**: Bewijs dit. Generaliseer je resultaat.
[2] Zoals Euclides, vandaar de naam "Euclidisch".
[3] Dit is een tegenvoorbeeld van de Wet van Stigler, die beweert: "Als iets vernoemd is naar een persoon, dan is het vernoemd naar de verkeerde persoon". De ontdekker van de wet heet Robert K. Merton.

Het bewijs

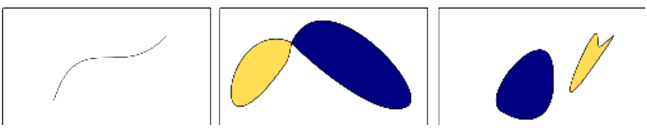
Het bewijs van Jordan had vanaf dit punt ongeveer zeven pagina's nodig om tot de conclusie te komen. Ondanks het aantal pagina's was dit bewijs niet heel erg volledig en sloeg veel details over, zodat de preciezere aanpak van Oswald Veblen populairder werd. Deze populariteit is uit de hand gelopen. Het verhaal gaat zelfs dat Jordan grove fouten had gemaakt in zijn bewijs, wat helemaal niet zo is. Een moderne en uitgebreide editie van Jordans bewijs kost zelfs iets meer dan 12 bladzijden. Hoewel de redactie van de Vakidioot graag haar pagina-aantal vult, is deze lengte toch iets te gortig. Geïnteresseerden kunnen het vinden op `http://mizar.org/trybulec65/4.pdf`.

Terug naar de werkelijkheid

Meer dimensies zijn best makkelijk toe te voegen door de getallen te vervangen met een variabele n: Als $\gamma : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ een inbedding is met beeld $C = \gamma(S^n)$, bestaat $\mathbb{R}^{n+1} \backslash C$ uit twee samenhangende componenten, een begrensde component en een onbegrensde component, en de rand van deze componenten is precies de kromme C. Deze editie van de stelling is uiteraard nog lastiger te bewijzen.

De stelling werkt ook op het oppervlak van een bol, zoals dat van de aarde, door in feite de bol lek te prikken en open te vouwen tot een vlak. Op dat vlak kun je de stelling toepassen, en door het gaatje dicht te plakken krijg je een bol terug die in twee delen is opgedeeld. Dit gaat niet zomaar goed: als je dat gaatje precies op de grens neerlegt, knip je je grens open en heb je niet meer een gesloten kromme.

Toch kun je het trucje van het openknippen en dichtplakken nuttig gebruiken om een ander praktisch bezwaar op te lossen: wat als je grens van de rand van het gebied tot de rand van het gebied loopt? Zolang die tussendoor niet nog een keer op de rand terechtkomt, kun je doen alsof die rand afkomstig is van een bol die je hebt opengevouwen, waarbij het punt waar die bol lekgeprikt is dus fout is gekozen. Plak je de bol weer dicht, dan heb je een heel gewone gesloten kromme op een bol, en we weten al hoe die aangepakt moet worden.



Deze figuren zijn bijvoorbeeld geen Jordankrommen omdat ze respectievelijk niet gesloten zijn, zichzelf snijden en onsamenhangend zijn.

Deze figuren zijn wel Jordankrommen.

Waardeloos

Marc Houben

Misschien vraag je je af of het leven nog wel zin heeft. Als we tenslotte even heel eerlijk zijn, is het grootste gedeelte van de wereld gewoon waardeloos. Nu suggereert de titel, in combinatie met de vorige twee zinnen, misschien dat dit artikel gaat over een aantal van de meest waardeloze dingen ter wereld. Niets is echter minder waar, want niemand heeft natuurlijk zin in zo'n negatieve instelling.

Kunst

De artistieke waarde van kunst wordt natuurlijk bepaald door de hoeveelheid geld waarvoor het verkocht is. Een voorbeeld van een kunstwerk dat volgens velen van groot kunsthistorisch belang is, is de voor meer dan 15 miljoen dollar verkochte "basketbal in een bak met water". Het werk van kunstenaar Jeff Koons bestaat uit een bak met gedestilleerd water, met daarin – je raadt het waarschijnlijk al – een basketbal. Ik vind zelf dat het bedrag dat voor dit meesterwerk is betaald, veel te laag is. Maar goed, ik ben dan ook geen ervaren kunstcriticus.

Brood

Broodhandschoenen

Hoe vaak heb je wel niet gehad dat je in de winter buiten een boterham wilde eten, maar dat je vingers te koud zijn? Nu kan je natuurlijk je wollen handschoenen aan doen, maar dan is de kans groot dat je meer wol dan brood binnenkrijgt. De oplossing hiervoor zie je hiernaast. Met het motto "Make everything into a sandwich", is de broodhandschoen één van de meest waardevolle uitvindingen ooit. Voordat je naar de winkel rent om ze te halen: ik heb ze nog nergens in Nederland gezien. Waarom dit artikel nog niet in elke supermarkt aanwezig is, is mij nog onduidelijk.

Geld

De bovengenoemde voorbeelden gaan natuurlijk helemaal nergens over, want wat is er nou meer waard dan geld? Iedereen weet dat de waarde van geld wordt bepaald door de hoeveelheid nullen op het biljet. Zo leert een snelle rekensom ons dat een biljet van 100 euro ongeveer 10 keer zo veel waard is als een biljet van 10 euro.

In een jaar tijd werd het geld in Hongarije ongeveer 10^{19} *keer zo veel waard!*

De naoorlogse Hongaarse regering begreep dit concept heel erg goed, dus om hun economische problemen op te lossen besloten ze in 1945 om zo snel mogelijk bankbiljetten bij te drukken van een zo groot mogelijke waarde. De munteenheid toentertijd was de "pengö", en er werden biljetten gebruikt tot een waarde van 100 pengö (zie het bovenste plaatje hiernaast). Het eerste nieuwe biljet werd geïntroduceerd op 1 juni 1945, met een waarde van 500 pengö, gevolgd door het 1000 pengöbiljet op 16 juli 1945. Daarna hadden ze blijkbaar de smaak te pakken, want binnen een jaar werden al briefjes met een waarde van een miljard pengö ingevoerd. Hierna besloten ze dat er toch wel erg veel nullen op het biljet stonden, dus het volgende biljet had een waarde van 10000 "milpengö" (tienduizend miljoen pengö). Toen ze bezig waren met het drukken van biljetten van een miljard bilpengö (10^{21} pengo) vonden ze dat het maar eens genoeg was geweest, dus zijn ze op 1 augustus 1946 overgestapt op de "forint", met een wisselkoers van 1 forint = 4×10^{29} pengö.


IDIOOT

Waardeloos

Marc Houben

Misschien vraag je je af of het leven nog wel zin heeft. Als we tenslotte even heel eerlijk zijn, is het grootste gedeelte van de wereld gewoon waardeloos. Nu suggereert de titel, in combinatie met de vorige twee zinnen, misschien dat dit artikel gaat over een aantal van de meest waardeloze dingen ter wereld. Niets is echter minder waar, want niemand heeft natuurlijk zin in zo'n negatieve instelling.

Kunst

De artistieke waarde van kunst wordt natuurlijk bepaald door de hoeveelheid geld waarvoor het verkocht is. Een voorbeeld van een kunstwerk dat volgens velen van groot kunsthistorisch belang is, is de voor meer dan 15 miljoen dollar verkochte "basketbal in een bak met water". Het werk van kunstenaar Jeff Koons bestaat uit een bak met gedestilleerd water, met daarin – je raadt het waarschijnlijk al – een basketbal. Ik vind zelf dat het bedrag dat voor dit meesterwerk is betaald, veel te laag is. Maar goed, ik ben dan ook geen ervaren kunstcriticus.

Brood

Hoe vaak heb je wel niet gehad dat je in de winter buiten een boterham wilde eten, maar dat je vingers te koud zijn? Nu kan je natuurlijk je wollen handschoenen aan doen, maar dan is de kans groot dat je meer wol dan brood binnenkrijgt. De oplossing hiervoor zie je hiernaast. Met het motto "Make everything into a sandwich", is de broodhandschoen één van de meest waardevolle uitvindingen ooit. Voordat je naar de winkel rent om ze te halen: ik heb ze nog nergens in Nederland gezien. Waarom dit artikel nog niet in elke supermarkt aanwezig is, is mij nog onduidelijk.

Broodhandschoenen

Thema VAKIDIOOT 1

Dit artikel

Ja, ik weet niet echt wat ik hierover moet zeggen. Dit artikel is inderdaad best waardeloos.

Klassieke puzzel

Marc Houben

Help! Bij het maken van de vakidioot ging er iets mis. Bij elk artikel is de auteur, het plaatje en de positie in de vakidioot kwijtgeraakt. Jij moet bij elke titel bedenken wie het heeft geschreven, wat het plaatje bij het artikel is en op welke positie in de vakidioot het artikel moet staan. Je mag gebruiken dat elke auteur precies één artikel heeft geschreven, en dat elk artikel bij precies één van de plaatjes hoort. Er zijn precies zeven artikelen, auteurs, plaatjes en posities. De titels zijn "Iets om nooit te vergeten", "Tien samenzweringstheorieën over kalkoenen", "Het verschil tussen koelkasten en operazangers", "De geschiedenis van aluhoedjes", "De overeenkomst tussen koelkasten en operazangers", "Tosti's en andere levensbehoeften" en "Waarom wekkers verboden moeten worden". De auteurs zijn Babette, Berend, Bryan, Chun, Jim, Koen en Tim. De plaatjes zijn van een kat, hond, hamster, varken, dwergkanarie, olifant en goudvis. De posities zijn 1 tot en met 7. Hieronder staan de hints.

1. Het artikel op positie 7 heeft niet het plaatje van een hond.
2. Het artikel van Babette zit ergens na het artikel met het plaatje van de goudvis.
3. Het artikel met het plaatje van het varken zit 3 posities na het artikel van Koen.
4. Het artikel met de titel "Tosti's en andere levensbehoeften" zit ergens na het artikel met de titel "Het verschil tussen koelkasten en operazangers".
5. Het artikel op positie 1 heeft ofwel het plaatje van de olifant, ofwel het plaatje van het varken.
6. Het artikel van Chun komt ergens na het artikel van Berend.
7. Het artikel met het plaatje van de goudvis, het artikel van Berend, en het artikel op positie 3 zijn drie verschillende artikelen
8. Het artikel met de titel "Waarom wekkers verboden moeten worden" zit 2 posities na het artikel "De geschiedenis van aluhoedjes".
9. Van het artikel op positie 5 en het artikel van Chun, heeft één de titel "10 samenzweveringstheorieën over kalkoenen" en de ander heeft een plaatje van een kat.
10. Het artikel op positie 5, het artikel van Berend, het artikel op positie 3, het artikel met de titel "Iets om nooit te vergeten", het artikel van Bryan en het artikel met de titel "Tosti's en andere levensbehoeften" zijn allemaal verschillende artikels.
11. Het artikel met het plaatje van een hamster zit 1 positie na het artikel met het plaatje van een kat.
12. Het artikel met het plaatje van een kat zit 3 posities voor het artikel van Jim.
13. Van de artikelen "Tosti's en andere levensbehoeften" en "De geschiedenis van aluhoedjes" heeft één positie 2 en de ander is van Chun.

De winnaar van de vorige puzzel is Pepijn Overbeeke! Hij mag een prijsje ophalen in de A–Eskwadraatkamer. Wil jij ook een prijsje winnen, stuur dan een oplossing van deze puzzel naar `vakidioot@a-eskwadraat.nl`.

Onbruikbare herbruikbare raketten

Tim Baanen

Het was bij het schrijven van dit artikel nog maar een week geleden, maar bij het ploffen van de Vakidioot op de deurmat al wat verder weggezakt: de eerste succesvolle landing van een rakettrap op een boot. Een paar maanden daarvoor was hetzelfde kunststukje al gelukt op het vasteland.[1] De terugkeer van de eerste trap van de Falcon 9-raket is hiermee een historisch moment in de ontwikkeling van herbruikbare raketten en betaalbare ruimtevaart, zo beweert de afdeling marketing van de producent SpaceX.

De lancering begint bij een van de torens van het Kennedy Space Center in Florida. Negen reusachtige raketmotoren worden aangestoken om de zeventig meter lange raket de lucht in te duwen. Nadat de eerste trap op de rand van de ruimte het grootste deel van zijn brandstof heeft gebruikt, wordt deze losgekoppeld en kan de tweede trap gestart worden. Normale raketten laten een opgebruikte trap daarna gewoon hun gangetje gaan, en ergens in de atmosfeer opbranden of in de oceaan neerstorten. Het interessante aan de Falcon 9 is dat de eerste trap een deel van de brandstof bewaart om veilig te kunnen landen. Afhankelijk van hoeveel brandstof ze verwachten over te hebben, besluit SpaceX of de landingsplaats vlak naast de lanceerinrichting wordt gebruikt, of een robotschip dat op de oceaan drijft.

[1] De week voordat dit artikel definitief af moest zijn, was er alweer een sucessvolle landing.

Eerst draait de trap zichzelf helemaal om, gestuwd door grote stuwraketten. Op het hoogste punt van zijn kogelbaan begint de trap met afremmen door drie van zijn motoren af te vuren. De trap vliegt daardoor naar de landingsplaats. Omdat de tweede trap is losgekoppeld en bijna alle brandstof al op is, kost de terugweg aanzienlijk minder dan de heenweg. Zelfs met de flinke remming komt de rakettrap met ongeveer twee keer de snelheid van het geluid door de atmosfeer. Dit is genoeg om verstekelingen, die ook al zijn gestikt in de ruimte, flinke brandwonden te geven. De motoren worden nog een keer ontstoken en samen met de luchtweerstand houden ze de snelheid onder controle. Uitgeklapte vinnen aan de bovenkant van de trap sturen hem richting de landingsplaats.

De laatste keer dat de motoren aan gaan is vlak boven de landingsplaats. Omdat zoveel brandstof is verbruikt, produceert een losse raketmotor met gas tot het minimum teruggenomen, nog steeds meer kracht dan de trap weegt. Het is dus onmogelijk om de raket in stilstand te laten zweven; de raket moet precies op het juiste moment aangestoken worden om precies op nul meter hoogte met nul meter per seconde te gaan. Geen wonder dat dit een aantal keren fout ging.

Raketten versus vliegtuigen

Hoewel het hergebruiken van rakettrappen aardig scheelt in de kosten, is alleen het brandstofgebruik al schrikbarend. Volgetankt weegt de laatste editie van de Falcon 9 meer dan 40 keer zoveel als de maximale nuttige lading, zodat samen met de herbruikbare eerste trap ongeveer twee procent van alle massa na de lancering overblijft. Een compleet volgetankte Airbus A380 weegt iets meer dan een volgeladen Falcon 9, en kan ongeveer tien procent nuttige lading aan. Na zo'n 10 000 km vliegen is alle brandstof op, en is het vliegtuig ongeveer de helft lichter. De rest kan helemaal hergebruikt worden.

De belangrijkste verklaring voor dit verschil is dat raketten verticaal vliegen en vliegtuigen horizontaal. Daarom kunnen vliegtuigen veel minder stuwkracht produceren dan ze zelf wegen, terwijl raketten op zo'n manier niet van de grond kunnen komen. Een A380 heeft vijf keer minder stuwkracht dan een Falcon 9.

Zoals elk zichzelf respecterend vakgebied heeft de ruimtevaart (waaronder raketbouwers, raketontwerpers, raketpiloten, raketspotters, andere raketenthousiastelingen, en spelers van Kerbal Space Program) een grote collectie jargon, terminologie en eufemismen om buitenstaanders te kunnen buitensluiten.

terminologie	*betekenis*
ASDS	robotschip waar SpaceX raketten op landt
delta-v, Δv	snelheidsverschil; maat van raketeffectiviteit
Falcon 9 full thrust	opvolger Falcon 9 versie 1.1, nieuwste editie
lithobraking	afremmen door tegen planeet aan te vliegen, vaak gevolgd door *rapid unplanned disassembly*
hover-slam	zie *suicide burn*
rapid unplanned disassembly	ontploffing
specific impulse, I_{sp}	maat van efficiëntie van motoren
suicide burn	op het allerlaatste mogelijke moment afremmen, kan *lithobraking* tot gevolg hebben
TWR	verhouding tussen stuwkracht en gewicht

Bovendien hebben raketten in de ruimte geen toegang tot zuurstof om de verbrandingsreacties mee aan te drijven. Dat moeten ze zelf dus ook allemaal meenemen, wat nog eens twee keer meer gewicht vereist. Samen met de extra stuwkracht zijn vliegtuigmotoren al snel tien tot twintig keer zo efficiënt als raketmotoren. Raketten kunnen dus niet zomaar vliegtuigachtiger worden.[2]

En de Space Shuttle dan?

Toch zijn er een aantal vliegtuigvormige raketten gebouwd. Naast een paar vliegtuigjes waar een raketmotor onder is gehangen om ze net tot in de ruimte te schieten, waarna ze meteen terugvallen, is de Space Shuttle het grote voorbeeld. Het was de bedoeling dat deze shuttles een stuk goedkoper zouden werken dan de gebruikelijke onherbruikbare rakettrappen. Dat de shuttle nog steeds elke vlucht een enorme brandstoftank (met een prijskaartje van tientallen miljoenen dollars) op liet branden in de atmosfeer was gewoon een kinderziekte waar gauw een oplossing voor zou komen.

De Kijk van april 1978 had het over het einde van de pionierstijd van de ruimtevaart toen de shuttle in 1980 zou gaan vliegen. De 226 missies die alleen al voor het Spacelabprogramma gepland stonden tot 1991 maakte ruimtevaart tot een routineklus. Het nummer van juni 1981, toen de shuttle eindelijk voor het eerst vloog, verwachtte tot wel twee lanceringen per week.[3] De kosten per lancering werden geschat op 45 miljoen dollar. Nu het programma helemaal is afgerond blijkt dit ongeveer een tiende van de echte prijs. Vooral het idee van ruimtelasers om op de Russen af te kunnen schieten was in die tijd populair. De editie van maart 1982 voorspelde dat over tien jaar de shuttle tientallen lasersatellieten zou lanceren, precies op tijd dus om nutteloos te worden bij het uiteenvallen van de Sovjet-Unie.

De Russen zaten ook niet stil: in de Kijk van november 1983 staan een aantal wazige foto’s die een spionagevliegtuig van een proefmodel heeft gemaakt, dat vijf jaar later tot een werkend ruimteveer moest leiden. Dat gebeurde inderdaad: in november 1988 werd een onbemande Buranshuttle gelanceerd die na twee banen rond de aarde terugkeerde en netjes landde. De Buran was duidelijk gekopieerd van de Amerikaanse shuttle, en bleek compleet onpraktisch. Na de enige ruimtevlucht werd het in een hangar gezet, en vernietigd toen de hangar een paar jaar later instortte.

Uiteindelijk bleek de Space Shuttle een miljardenverslindend project. Er was geen geld over om de problemen, die al lang voor de lancering bekend waren, op te lossen. Samen met de veel langere onderhoudstijd tussen lanceringen zorgde dit ervoor dat er altijd minder dan tien lanceringen per jaar uitgevoerd zijn. Daarbij komt ook nog eens de schrikbarende hoeveelheid veiligheidsproblemen die genegeerd werden, met de tragische gevolgen van dien.

Recyclen kost ook geld

Wie in het verleden leeft, heeft alles om naar uit te kijken, zo zei een wijsneus ooit. De hype rondom de nieuwe herbruikbare raket van SpaceX lijkt griezelig op die rondom de Space Shuttle, niet in het minst gehinderd door de afdeling marketing van SpaceX. Een raketontwerp dat als revolutionair wordt aangeprezen, een raket waarvan een paar onderdelen geborgen kunnen worden die herbruikbaar wordt genoemd en het aangekondigde opnieuw opzetten van de bemande ruimtevaart in de VS zijn allemaal belangrijke overeenkomsten. Laten we hopen dat de resultaten van de programma’s radicaal verschillend zijn.

---

[2] Als dat kon, zouden die raketgeleerden nogal dom zijn om het niet te doen.

[3] In het artikel werd al melding gemaakt van beschadigingen aan het hitteschild, die Space Shuttle Columbia uiteindelijk fataal werden.

De onwaarschijnlijke complexe trukendoos

Dingen die verrassend genoeg waar zijn in complexe analyse

Babette de Wolff

Analyse op het complexe vlak is een effectief stuk gereedschap voor natuurkundigen (zie vorige Vakidioot) en ook voor getaltheoreten. Vanuit een analytisch oogpunt is het ook een interessant onderwerp. Als je wel eens het complexe vlak hebt getekend (met een reële en een imaginaire as), is het je misschien opgevallen dat het er verdacht veel uitziet als de tweedimensionale reële ruimte $\mathbb{R}^2$, met de extra *feature* dat je twee punten in het vlak ook met elkaar kunt vermenigvuldigen. Het blijkt echter dat deze extra eigenschap ervoor zorgt dat complexe functies zich heel anders gedragen dan reëelwaardige functies en in het bijzonder dat je er onredelijk sterke uitspraken over kunt doen.[1] In dit artikel zullen we twee van die eigenschappen – misschien wel de twee bekendste – uitlichten.

Differentieerbaar is glad

Een belangrijke notie in de reële analyse is de 'gladheid' van een functie. Als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie is, dan geldt dat $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ook een functie is, die we mogelijk weer kunnen differentiëren. Deze tweede afgeleide – als die bestaat – is zelf ook weer een functie die we mogelijk kunnen afleiden, et cetera. Als een functie oneindig vaak differentieerbaar is (dus n keer differentieerbaar voor elke $n \in \mathbb{N}$), dan noemen we deze functie glad. De meeste functies die je zo even uit je mouw kan schudden, zijn ofwel niet overal differentieerbaar (bijvoorbeeld $f(x) = |x|$) ofwel glad (bijvoorbeeld je favoriete polynoom). Met een beetje meer moeite kan je functies construeren die differentieerbaar zijn maar niet glad; een effectieve methode om dit te doen is door je functie stuksgewijs te definiëren, bijvoorbeeld[2]:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0 \\ x^2 & \text{als } x > 0. \end{cases}$$

Via het differentiequotiënt kunnen we ook op het complexe vlak differentieerbaarheid van een functie definiëren. Er kan nu bewezen worden dat elke complex differentieerbare functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ook meteen glad is. Een functie die differentieerbaar (dus glad!) is op elk punt van haar domein, wordt ook wel *holomorf* genoemd.

Het maximummodulusprincipe

Als je wilt weten hoe een functie zich gedraagt, is het interessant om te weten of een functie ergens een maximum of een minimum heeft. Als je bijvoorbeeld een proces wilt optimaliseren, is het ook belangrijk te weten of de functie waarmee je een proces beschrijft, ergens

[1] **DOE-TIP** voor gezelschappen: sla een boek over complexe analyse open op een willekeurige pagina en verbaas je over wat er staat.

[2] **DOE-TIP**: bepaal de afgeleide, en concludeer dat die niet meer differentieerbaar is.

een maximum (of minimum) heeft. Gelukkig heeft de reële analyse hier een mooi criterium voor.

Stelling 1. *Zij $U \subseteq \mathbb{R}^n$ een compacte (oftewel gesloten en begrensde) verzameling en $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een continue functie. Dan neemt f op U haar maximum aan, dat wil zeggen: er bestaat een $z_0 \in U$ zodanig dat $f(z_0) \geq f(z)$ voor alle $z \in U$.*

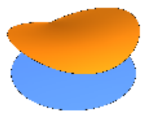
De stelling geeft verder geen informatie over waar je een dergelijk maximum kan vinden — en zover ik weet bestaat er in het algemeen ook niet zo'n criterium. Weten dat het maximum ergens bestaat, is al fantastisch en in principe ook alles wat je nodig hebt: als dat maximum bestaat, kun je al je favoriete numerieke methoden gebruiken om het maximum te vinden. Stel nu dat $g : U \to \mathbb{R}^m$ ook een continue functie is, weer met $U \subseteq \mathbb{R}^n$ een compacte verzameling. Er geldt dan in het bijzonder dat $\|g\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een continue afbeelding is, want het nemen van een norm is een continue operatie. Passen we dan Stelling **??** toe, dan betekent dat dat $\|g\|$ haar maximum aanneemt op U.

Omdat Stelling **??** een erg mooi en nuttig resultaat is willen we graag een soortgelijke stelling vinden voor het complexe vlak. Natuurlijk kunnen we gewoon $\mathbb{C}$ opvatten als $\mathbb{R}^2$ en dan Stelling **??** toepassen. Het gekke van complexe analyse is dat we, onder een paar extra voorwaarden, een veel sterkere uitspraak kunnen doen.

We noemen een verzameling $U \subseteq \mathbb{C}$ padsamenhangend wanneer je voor elke twee punten $x, y \in U$ van x naar y kan lopen zonder U te verlaten. Met deze terminologie kunnen we de volgende stelling introduceren:

Stelling 2. *Zij $U \subseteq \mathbb{C}$ een open, padsamenhangende verzameling en $f : U \to \mathbb{C}$ een holomorfe functie. Stel dat er een punt $z_0 \in U$ bestaat zodat $\|f(z_0)\| \geq \|f(z)\|$ voor alle $z \in U$. Dan is de functie f constant.*

Als een holomorfe functie dus op een open, padsamenhangende verzameling haar maximum aanneemt, moet die functie meteen constant zijn: iets wat in de reële analyse absoluut niet waar is.[3] Behalve dat dit onredelijk sterk is, heeft het ook een belangrijk gevolg: als we Stelling **??** gebruiken om het maximum van een holomorfe functie beter te localiseren. Stelling **??** wordt ook wel het *maximummodulusprincipe* genoemd, omdat 'ie – je raadt het al – wat zegt over het maximum van de modulus van een complexe functie.



Een plot van $1 + \|Sin(z)\|$ vanaf de complexe eenheidscirkel

Zij $U \subseteq \mathbb{C}$ een compacte (oftewel gesloten en begrensde), padsamenhangende verzameling. Zij f nu een niet-constante functie zodanig dat f holomorf is op het inwendige[4] van U en continu is op de rand van U. Door $\mathbb{C}$ op te vatten als $\mathbb{R}^2$ en Stelling **??** toe te passen, vinden we dat $\|f\|$ haar maximum op U aan moet nemen. Aangezien we op $\mathbb{C}$ werken, hebben we extra informatie: $\|f\|$ moet haar maximum op *de rand van U* aannemen. Als $\|f\|$ haar maximum op het inwendige van U zou aannemen, zou Stelling **??** namelijk impliceren dat $\|f\|$ constant is, wat in tegenspraak is met onze aanname. In het geval dat we op $\mathbb{C}$ werken, kunnen we het maximum dus nog steeds niet precies localiseren, maar in ieder geval zeggen dat het zich op de rand bevindt.

[3] **DOE-TIP**: verzin een tegenvoorbeeld.
[4] Dat wil zeggen, alles behalve de rand.

Waarom er tussen Polen en Litouwen een stuk Rusland ligt

Peter Speets

Ingeklemd tussen Polen en Litouwen ligt de Russische exclave Kaliningrad. Het oblast Kaliningrad is half zo groot als België en is daarmee voor Russische begrippen klein. Waarom hoort Kaliningrad bij Rusland?

In 1255 veroverden de Teutoonse ridders het gebied van de Pruissische stammen en stichtten daar een fort dat uit zou groeien tot de stad Koningsbergen.[1] De Teutoonse orde vormde na de verovering een onafhankelijke staat, totdat het in 1466 werd opgesplitst. Het westelijke deel werd geannexeerd door het Koninkrijk Polen en het oostelijke deel bleef in de vorm van een hertogdom door de Teutoonse orde bestuurd worden als vazalstaat van Polen. Dit ging goed, totdat in het begin van de zeventiende eeuw door gebrek aan een mannelijke opvolger van de hertog van Oost-Pruisen de gebieden werden geërfd door de keurvorst van Brandenburg, een vazal van het Heilige Roomse Rijk. Hierdoor ontstond de situatie dat een vazal trouw moest zweren aan twee rivaliserende koningen. In de loop van de zeventiende eeuw vervaagde de subtiliteit dat Brandenburg en Pruisen twee verschillende gebieden waren met 'toevallig' eenzelfde heerser en werd er naar de gebieden gerefereerd met Brandenburg-Pruisen. In 1701 mocht de hertog van Pruisen zichzelf koning *in* Pruisen noemen. Hij mocht zichzelf van de Heilige Roomse keizer namelijk niet koning *van* Pruisen noemen. Brandenburg was veel belangrijker dan Oost-Pruisen,[2] maar was onderdeel van het Heilige Roomse Rijk. De koning danwel hertog van één van de belangrijkste gebieden van Europa was dus alleen koning in een relatief klein en dunbevolkt gebied. Omdat de invloed van de Heilige Roomse keizer steeds beperkter werd, groeide het (inmiddels) Koninkrijk Pruisen uit tot een gebied dat ruwweg heel Noord-Duitsland besloeg én Oost-Pruisen.

Door de eenwording van Duitsland werd de waaier van verschillende (stad)staten uit het vroegere Heilig Roomse Rijk één land: het Duitse Keizerrijk.[3] Hiermee erfde Duitsland in feite Oost-Pruisen van het Koninkrijk Pruisen. In de Tweede Wereldoorlog raakte Duitsland Oost-Pruisen kwijt aan de Sovjet-Unie en werden de Duitssprekende inwoners gedeporteerd naar de DDR. De stad Koningsbergen werd hernoemd naar Mikhail Kalinin en opnieuw bevolkt door Russen. Oost-Pruisen werd geannexeerd als oblast van Rusland en kreeg dezelfde naam als zijn hoofdstad. Na het uiteenvallen van de Sovjet-Unie is Kaliningrad bij Rusland blijven horen.

[1] Bekend van Eulers probleem 'Zeven bruggen van Koningsbergen'.
[2] West-Pruisen zou later pas bij het Koninkrijk Pruisen horen om daarna weer onderdeel van Polen te worden.
[3] en daarvoor de Duitse Bond.

Emoji – Hoe ze op je telefoon terecht gekomen zijn

Koen van Baarsen

Emoji zijn één van de grootste veranderingen in digitale communicatie sinds het internet. Uit onderzoek blijkt dat bijna 100% van de mensen jonger dan 25 jaar ze gebruikt tijdens het appen. Wanneer we face-to-face communiceren, gaat het grootste gedeelte van de communicatie non-verbaal. Naast woorden, communiceren we ook met gezichtsuitdrukkingen, intonatie en onze lichaamshouding. Deze vormen van communicatie vallen weg bij communicatie via bijvoorbeeld WhatsApp. Berichten met alleen tekst zijn sterk open voor interpretatie. Een bericht kan bijvoorbeeld serieus of sarcastisch bedoeld zijn. Hiervoor kunnen emoji gebruikt worden. Ze zijn nuttig om het gebrek aan non-verbale communicatie te compenseren. Met de 'Face With Tears of Joy' emoji kan je bijvoorbeeld communiceren dat iets een grapje was. Of met de 'Party Popper' kan je "iets vieren".

De manier waarop ze op onze telefoons terecht zijn gekomen, is een lang en interessant verhaal dat begint in de jaren zestig. Er werd toen grootschalig gebruik gemaakt van de teleprinter, een soort typemachine waarmee je berichten kon versturen en ontvangen over lange afstanden. Iedere letter had natuurlijk een ander signaal nodig. Omdat het niet wenselijk was dat verschillende teleprinters met verschillende signalen werkten, werd er in de jaren zestig in Engelstalige landen de ASCII-standaard geïntroduceerd. Met 7 bits konden de meest gebruikte letters, cijfers en leestekens met behulp van deze standaard verstuurd worden. Landen met andere talen ontwikkelden echter andere standaarden. In Noorwegen en Denemarken gebruiken ze bijvoorbeeld meer letters in hun alfabet. In Japan is het alfabet compleet anders, en veel groter. De manier waarop de karakters gerepresenteerd werden in binaire signalen was dus ook compleet anders.

Hieruit ontstonden de emoji. Werkzaam bij DoCoMo, een grote Japanse serviceprovider, had Shigetaka Kurita het idee extra symbooltjes toe te voegen aan de karakters die al verstuurd konden worden vanaf je telefoon. Het werkte eigenlijk hetzelfde als de normale Japanse karakters. Het symbool van het karakter werd opgeslagen in je telefoon, en via de binaire code kon ernaar verwezen worden. Rond dezelfde tijd was het Unicode Consortium bezig de verschillende karakter coderingen die over de wereld in gebruik waren te standaardiseren. Het idee was dat alle karakters van alle talen één codering zouden krijgen. Belangrijk daarbij was dat er geen gegevens verloren mochten gaan als een tekst omgezet werd naar Unicode. Een tekst moest naar Unicode en weer terug vertaald kunnen worden, zonder dat er informatie verloren raakt. Om ook de karaktercoderingen van de Japanse tekstberichten naar Unicode te kunnen vertalen moesten de emoji dus ook opgenomen worden in Unicode.

Dat was nog niet de reden dat emoji populair werden buiten Japan. Mensen in westerse landen gingen pas emoji gebruiken toen ze ondersteund werden op de iPhone. Om de iPhone succesvol te maken in Japan moest Apple er emoji's op ondersteunen. Met iOS 4 hebben ze het emoji-toetsenbord ingeschakeld voor telefoons buiten Japan. Het was een beetje van waarom niet, het is immers onderdeel van de Unicode standaard. Hierdoor ging het viral. Mensen konden nu ineens de emoji naar elkaar versturen in hun tekstberichten.

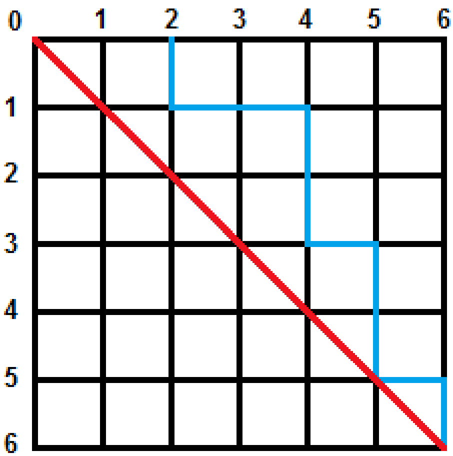
Toiletproblemen

Marc Houben

Stel je voor: je zit op het toilet en hebt de keuze uit twee toiletrollen. Je staat nu natuurlijk voor het volgende dilemma: Moet ik de rol gebruiken waar nog het meeste papier op zit, of juist de rol waar nog het minste papier op zit? Dit artikel geeft geen antwoord op die vraag.

Wat we wel gaan beantwoorden is het volgende: Stel we hebben een openbaar toilet met twee toiletrollen. Als mensen een stuk pakken, kiezen ze met kans p voor de rol met het meeste papier en met kans $q = 1 - p$ voor de rol met het minste papier. Als we beginnen met n stukken papier op elke rol, wat is dan het verwachte aantal overgebleven stukken toiletpapier $V_n(p)$ wanneer één van beide rollen voor het eerst op is?

We kunnen beginnen door zonder verlies van algemeenheid aan te nemen dat de eerste rol altijd het meeste papier bevat, dat wil zeggen, als beide rollen evenveel papier hebben dan kiest iedereen van de tweede rol. We kunnen nu $V_{nm}(p)$ noteren voor het verwachte aantal overgebleven stukken als we beginnen met n stukken op rol 1 en m stukken op rol 2. Met deze notatie hebben we nu dus $V_{nn}(p) = V_n(p)$, $V_{n0}(p) = n$ en als $m > n > 0$: $V_{mm}(p) = V_{m(m-1)}(p)$, $V_{mn}(p) = pV_{(m-1)n}(p) + qV_{m(n-1)}(p)$. Een bepaald verloop van de hoeveelheid papier op elke rol beginnend met 6 stukken op elke rol zou je nu als volgt kunnen visualiseren (het aantal stukken papier op de eerste rol correspondeert met de horizontale as, en de tweede rol correspondeert met de verticale as):



Het blauwe pad stelt het verloop van de hoeveelheden papier op de toiletrollen voor. We beginnen met zes stukken op elke rol, en in dit geval blijven er uiteindelijk twee stukken over. De rode lijn is de diagonaal. Omdat we aannemen dat de eerste rol altijd het meeste papier bevat, blijft het blauwe pad altijd boven de rode lijn.

In het gegeven voorbeeld is kans dat we precies het blauwe pad in doorlopen p^3q^4, we bewegen namelijk telkens met kans p in de horizontale richting en, als we ons niet op de diagonaal bevinden, met kans q in de verticale richting (anders gebeurt dit met kans 1).

De kans van elk pad dat van (n, n) naar $(n-k, n-k)$ gaat zonder tussendoor de diagonaal te raken is nu dus $p^k q^{k-1}$. De kans van elk pad dat van $(n, n-1)$ naar $(k, 1)$ gaat zonder tussendoor de diagonaal te raken is $p^{n-k}q^{n-2}$.

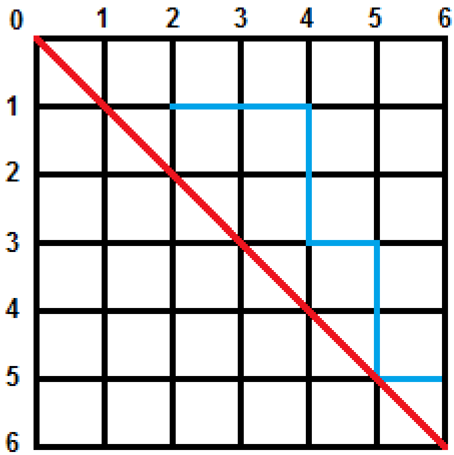
Als we nu c_k het aantal paden noemen tussen (n, n) en $(n-k, n-k)$ die tussendoor de diagonaal niet raken, en b_{nk} het aantal paden noemen tussen $(n, n-1)$ en $(k, 1)$ die de diagonaal nooit raken, dan wordt onze $V_n(p)$ dus gegeven door

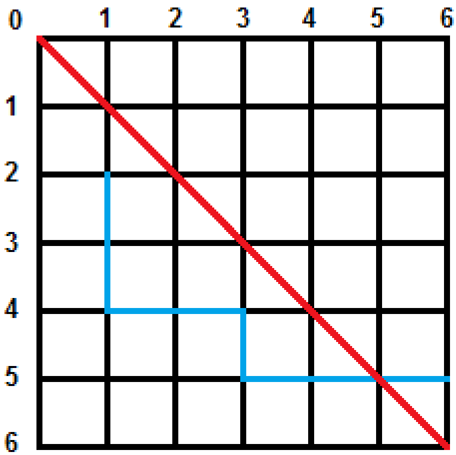
$$V_n(p) = c_1 p V_{n-1}(p) + c_2 p^2 q V_{n-2}(p) + \cdots + c_{n-1} p^{n-1} q^{n-2} V_1(p) + F_n(p) \tag{1}$$

Waarbij

$$F_n(p) = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 1 \\ q \sum_{k=2}^{n} b_{nk} p^{n-k} q^{n-2} k & \text{als } n \geq 2 \end{cases}$$

We kunnen nu de coëfficienten b_{nk} proberen te berekenen met behulp van een combinatorisch argument[1]. Stel dat we in ons grid een pad hebben van $(n, n-1)$ naar $(k, 1)$ (waarin we alleen naar boven en naar links bewegen) dat wél de diagonaal raakt. We kunnen dit nu omzetten naar een pad van $(n, n-1)$ naar $(1, k)$ door het pad in de diagonaal te spiegelen vanaf het punt waar hij de diagonaal het eerst raakt:





Op deze manier hebben we een bijectie tussen paden die de diagonaal wel raken en paden van $(n, n-1)$ naar $(1, k)$. We zien dus dat b_{nk} gelijk moet zijn aan het aantal paden tussen $(n, n-1)$ en $(k, 1)$ min het aantal paden tussen $(n, n-1)$ en $(1, k)$.

Een pad tussen (a, b) en (c, d) heeft $a - c$ stappen in de verticale richting en $b - d$ stappen in de horizontale richting. Een pad wordt volledig vastgelegd door de volgorde van horizontale

[1]Dat wil zeggen, je gebruikt je gezonde verstand.

en verticale stappen, dus het aantal paden van (a, b) naar (c, d) is $\binom{a-c+b-d}{a-c}$. Hiermee zien we:

$$b_{nk} = \binom{2n-k-2}{n-2} - \binom{2n-k-2}{n-1} = \frac{k-1}{n-1}\binom{2n-k-2}{n-2}$$

Verder is het aantal paden tussen (n, n) en $(1, 1)$ dat de diagonaal tussendoor niet raakt en bovendien boven de diagonaal blijft, gelijk aan het aantal paden tussen $(n, n-1)$ en $(2, 1)$ die de diagonaal nooit raken (de eerste en laatste stap staan vast), dus $c_{n-1} = b_{n2}$ en we vinden:

$$c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

De getallen c_n staan ook wel bekend als de Catalan-getallen[2]. Nu we een recursieve formule hebben voor $V_n(p)$ (namelijk (**??**)), en voor alles wat in die formule voorkomt, kunnen we in principe $V_n(p)$ berekenen. Maar wacht, dit is nog niet het moment om uit je dak te gaan, want berekenen van $V_n(p)$ op deze manier is natuurlijk verschrikkelijk. We gaan proberen een simpelere formule te vinden met behulp van genererende functies.

Genererende functies

De genererende functie van een bepaalde reeks getallen $a_1, a_2, \cdots$ is de machtreeks $a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$. Soms kun je deze in simpelere vorm zetten. Zo weten we bijvoorbeeld dat $z + z^2 + \cdots = \frac{z}{1-z}$ voor $|z| < 1$. Met behulp van complexe analyse kan je erachter komen dat de genererende functie voor de getallen c_n zoals hierboven gegeven wordt door:

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2}$$

Als je nu de recursieve formule (**??**) voor $V_n(p)$ gebruikt in combinatie met lelijk rekenwerk dan kom je erop uit dat de genererende functie voor $V_n(p)$ gegeven wordt door:

$$V(z) = \frac{z}{(1-z)^2}\left(\frac{q - C(pqz)}{q}\right)$$

Omdat $\frac{z}{(1-z)^2} = (z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots)$ en $\frac{q-C(pqz)}{q} = 1 - c_1 pz - c_2 p^2 q z^2 - c_3 p^3 q^2 z^3 - \cdots$ zien we door het product termsgewijs uit te werken dat:

$$V_n(p) = n - (n-1)c_1 p - (n-2)c_2 p^2 q - \cdots - 1 \cdot c_{n-1} p^{n-1} q^{n-2} = n - \sum_{k=1}^{n} (n-k) c_k p^k q^{k-1} \quad (2)$$

En hebben we dus een (relatief) simpele formule voor $V_n(p)$. In het bijzonder zien we dat $qV_n(p) + pn = pV_n(q) + qn$ waaruit volgt dat:

$$V_n(q) = \frac{q}{p} V_n(p) + \frac{p-q}{p} n \quad (3)$$

[2]Tenzij je graag begint met tellen bij 0. In dat geval is het n-de Catalan-getal gelijk aan c_{n+1}.

Benaderingen

Wat we nu nog willen weten is hoe V_n zich gedraagt als $n \to \infty$. Als we onze trukendoos van complexe analyse weer even open doen dan vinden we na wat rekenwerk dat, voor $p > \frac{1}{2}$:

$$V(z) = \frac{z}{1-z}\frac{p}{2p-1} + f(z)$$

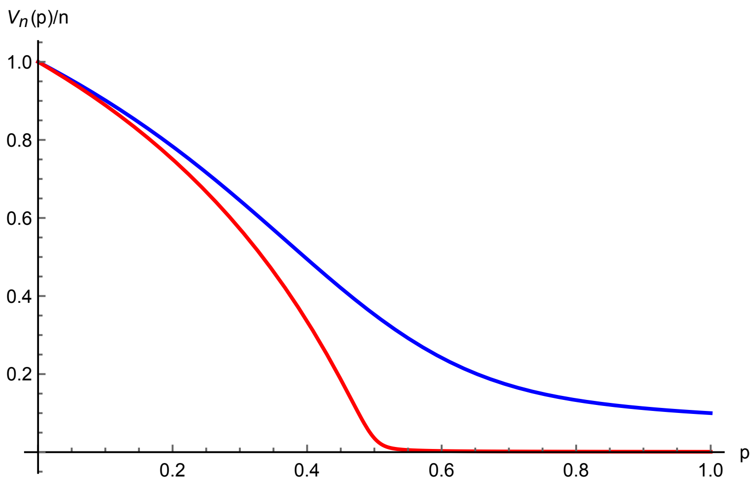
Waarbij $f(z)$ absoluut convergeert voor $|z| < \frac{1}{4pq}$. Op het moment dat $p > \frac{1}{2}$, is $4pq = 4p(1-p) < 1$, en volgt het dus dat $f(z)$ absoluut convergeert voor een z zodat $|z| > 1$. Het volgt dat de coefficient voor z^n van de machtreeksexpansie van $f(z)$ naar 0 moet gaan als $n \to \infty$. In combinatie met formule (**??**) zien we dat voor grote n:

$$V_n(p) \approx \begin{cases} \frac{p}{2p-1} & \text{als } p > \frac{1}{2} \\ \frac{p}{1-2p} + \frac{1-2p}{1-p}n & \text{als } p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Het enige geval dat overblijft is $p = \frac{1}{2}$. Hiervoor kunnen we gewoon $p = q = \frac{1}{2}$ invullen in formule (**??**). Met behulp van een combinatorisch argument (exercise for the reader)[3] zien we:

$$V_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2n}{4^n}\binom{2n}{n}$$

Hieronder zie je grafieken van $V_{10}(p)/10$ (blauw) en $V_{1000}(p)/1000$ (rood):



Opmerkelijk is, dat voor grote n het aantal overgebleven stukken toiletpapier bij $p = \frac{1}{2}$ redelijk snel omslaat. Mensen die wel hebben opgelet bij statistische fysica (ik niet dus) zullen hier misschien een verklaring voor hebben.

[3] Of door de som gewoon in the vullen in Mathematica..

Consultant bij Keylane

Think career, act Keylane.

Werk maken van talent

Ik ben Menno Bootsveld en nu bijna twee jaar werkzaam als consultant bij Keylane (voorheen bekend als Quinity). Na mijn master Applied Mathematics aan de Universiteit Twente zocht ik naar een baan bij een bedrijf die uitdaging, doorgroeimogelijkheden en een gezellige werksfeer combineert. Dit vond ik bij Keylane.

Keylane is een softwarebedrijf dat zich specialiseert in het ontwikkelen van verzekeringssoftware. Eén van onze belangrijkste producten is de Quinity Insurance Solution, kortweg QIS. Verzekeraars gebruiken QIS als standaardpakket voor hun polis- en schadeadministratie.

Consultant

Als consultant kun je bij Keylane verschillende rollen vervullen: functioneel ontwerper (denk aan het leiden van ontwerpsessies en uitwerken van nieuwe gewenste functionaliteiten), docent, inrichten van systemen, tester en meer. Ik ben de afgelopen tijd actief geweest in de rol van tester. Testen is veel meer dan op een knopje klikken en controleren of het systeem de juiste handeling uitvoert. Als tester ben je de eindredacteur van het systeem: als je vindt dat de kwaliteit niet op peil is wordt er niet opgeleverd. Je hebt contact met ontwerpers, testers en de klant en bent dus eigenlijk de spin in het web van het softwareontwikkelproces.

Keylane

Keylane ontwikkelt en implementeert flexibele standaardsoftware voor de kernprocessen van verzekeraars en pensioeninstellingen. Onze oplossing omvat een complete polis- en schadeadministratie voor verzekeraars, volmachten en intermediairs.

Contact

T +31 (0)88 404 50 00
E careers@keylane.com
careers.keylane.com

software that matters

Keylane
insurance & pension software

Waar je bent

Koen van Baarsen

Door de geschiedenis heen hebben we als mensen altijd naar de ruimte gekeken voor navigatie. Vroeger keken we naar sterrenbeelden en de positie van de zon om te bepalen waar we naartoe moesten. Nu kijken we dichterbij – op onze smartphones. Maar hoe kan dat precies?

Er draaien op dit moment meer dan 30 navigatiesatellieten rond de aarde. Deze satellieten hebben een zeer nauwkeurige atoomklok. Ze zenden continu de tijd van deze klok uit. De signalen van de GPS-satellieten worden verzonden op een hoge frequentie, wat de reden is dat je ze alleen buiten kunt ontvangen.

Op aarde kunnen GPS-ontvangers deze tijd van de satelliet ontvangen. Om een positie uit te rekenen, moeten er minimaal 3 satellietsignalen door de GPS-ontvanger verwerkt worden. Dit hoeft maar voor een korte tijd, genoeg om de tijd van de atoomklok door te krijgen.

Wanneer er minimaal 3 satellieten gevonden zijn, kan er met deze tijden een positie berekend worden.

De berekening die uitgevoerd wordt heet trilateratie. Door te berekenen hoe ver de GPS-ontvanger verwijderd is van elk van de drie satellieten, is het mogelijk de positie op aarde van de GPS-ontvanger te berekenen. Als er ook het signaal van een vierde satelliet is, kan zelfs de hoogte boven het aardoppervlak berekend worden.

Omdat de atoomklok in de satellieten zo nauwkeurig is, wordt het GPS-signaal ook gebruikt voor toepassingen waarbij een nauwkeurige klok noodzakelijk is. Een voorbeeld hiervan is de aandelenhandel. Doordat er veel transacties worden gedaan door veel partijen, is het erg belangrijk bij te houden wie wanneer eigendom heeft van een bepaald aandeel.

GPS: Grappige Poezen Site

Boids en de spreeuwen

Berend Ringeling

Het is altijd een prachtig gezicht, een zwerm spreeuwen in de lucht. Deze vogels vliegen samen alsof zij één geheel zijn, één grote bewegende zwarte massa. De vraag die rijst, is natuurlijk: Hoe doen die beesten dat nou? Hoe kunnen deze vogels zo gezamenlijk vliegen zonder dat zij de groep kwijtraken of tegen elkaar opbotsen?

Een methode om deze vogelvlucht te onderzoeken is door te simuleren. Het simulatieprogramma 'Boids' (Bird-oids) is daarvoor ontwikkeld door Craig Reynolds (deskundige op het gebied van kunstmatige intelligentie). Dit eenvoudige model gaat uit van de volgende regels voor iedere vogel:

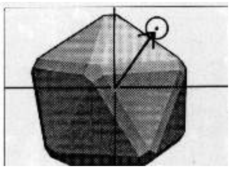
1. **Separation**. Richt je van de groep af als je te dicht bij de andere vogels komt. Om zeker te weten dat de groep niet tegen elkaar aan botst, kun je voor elke vogel programmeren dat binnen een bepaalde straal rond de vogel geen andere vogels mogen zijn.
2. **Alignment**. Vlieg in de gemiddelde groepsrichting. Bekijk de snelheidsvectoren van alle andere vogels in de groep en neem hiervan het gemiddelde. Tel nu een gedeelte van de oorspronkelijke snelheid op bij deze gemiddelde snelheidsvector.
3. **Cohesion**. Vlieg richting het midden van de groep (gemiddelde positie). Dit kan bepaald worden door het gemiddelde van de posities te nemen van alle andere vogels en de vogel in die richting te laten vliegen.

Het blijkt dat je met deze relatief simpele aannames toch een behoorlijk goed model kan maken van het spreeuwengedrag. Er kunnen ook nog verdere (ietwat complexere) regels toevoegd worden, zoals bijvoorbeeld: windinvloed, roofdierontwijking, snelheidslimitering en objectontwijking. Bij objectontwijking wil je bijvoorbeeld zorgen dat de vogels onder bruggen of langs gebouwen kunnen vliegen zonder er tegenaan te vliegen. Het idee is dat de vogel zoekt naar een object direct voor zich. Dan bepaalt hij het silhouet van het object dat het dichtst bij de potientiële impact ligt. Een richtingsvector wordt vervolgens berekend richting een punt dat net achter het silhouet ligt (zie figuur 2).

Tot nu toe is het sturen langs zo'n object in simulaties geïmplementeerd voor enkele objecten: bollen, cilinders, vlakken en balken. Objectontwijking voor complexere veelvlakken wordt nog ontwikkeld.

Figuur 1 *De richting die vogel opgaat bij respectievelijk Separation, Alignment en Cohesion.*

Het ontwijken van roofdieren is ook een vorm van objectontwijking. Op het moment dat er een roofdier in de buurt komt, zal de zwerm uit elkaar vallen. Het blijkt dat dit gedaan kan worden door alleen de derde regel (Cohesion) te negeren. De overige regels kunnen behouden blijven. Immers, het negeren van regel 1 (Separation) zorgt er alleen voor dat vogels tegen elkaar aan botsen en het negeren van regel 2 (Alignment) leidt tot chaotische situaties. Een voorbeeld hiervan is het plaatje hieronder. Dit plaatje suggereert een harmonieuze beweging, maar niets is minder waar. Echte vogelaars hebben natuurlijk opgemerkt dat er een slechtvalk tussen vliegt (het roofdier). We zien hoe de groep uit elkaar gedreven wordt. Toch kunnen we hier zien dat de vogels niet afzonderlijk wegvliegen; er ontstaat geen chaos.



Figuur 2 *De pijl wijst in de richting die de vogel moet vliegen om langs dit obstakel te komen.*

De ‘Boids’-simulatie kent ook vele extra toepassingen. Naast de simulatie van vogels kunnen ook scholen vissen of bepaalde kuddes zoodieren worden gesimuleerd. Eveneens worden ‘Boids’-simualties in films gebruikt zoals bij de film ‘Batman returns’ uit 1992, voor de simulatie van een zwerm vleermuizen, en in ‘De Leeuwenkoning’ (voor de kenners, dit was de emotionele scène waarin Mufasa onder de voet gelopen werd door een kudde gnoes).

Niet niet waar

Sophie Huiberts

Als een uitspraak niet onwaar is, is deze dan waar? Bijna iedereen vindt van wel, maar soms kan het nuttig zijn om dit niet zomaar aan te nemen.

De uitspraak $\neg\neg A \to A$ "als iets niet onwaar is, is het waar", is equivalent aan de wet van de uitgesloten derde, $A \vee \neg A$ "alles is waar of onwaar". Normaal gesproken nemen we dit aan voor elke logische formule A. De logica waar we dan in werken heet *klassieke logica*. De tegenhanger hiervan is *constructieve logica*, waarin we hier niet van uitgaan. We gaan er overigens niet van uit dat de wet van de uitgesloten derde altijd onwaar is, want $\neg\neg(\neg\neg A \to A)$ is wel nog steeds waar voor alle A. Een bewijs waarin de wet van de uitgesloten derde gebruikt wordt, noemen we een *bewijs uit het ongerijmde*.

Een voorbeeld van een bewijs uit het ongerijmde: Zijn er irrationale getallen a, b, zo dat a^b rationaal is? [1] Laten we kijken naar $a = b = \sqrt{2}$. Als a^b rationaal is, zijn we klaar. Als het irrationaal is, kijken we naar $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$. Nu is a^b dus gelijk aan

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

De wet van uitgesloten derde vertelt ons dat $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ofwel rationaal ofwel irrationaal is, dus is de uitspraak bewezen, zonder dat we een paar (a, b) hebben waarvan we weten dat het voldoet.

Even een kort stukje geschiedenis

Eind 19e eeuw werd er steeds abstracter geredeneerd in de wiskunde, bijvoorbeeld door Cantor die oneindige ordinaalgetallen introduceerde, en daar inductie op deed. Deze abstractie vonden een aantal wiskundigen, waaronder de Nederlander L.E.J. Brouwer, geen goed uitgangspunt voor de wiskunde. Zij vonden dat alle wiskunde gegrond moest zijn in mentale constructies en de menselijke intuïtie voor natuurlijke getallen. Omdat een bewijs uit het ongerijmde geen constructie oplevert, vonden ze dus ook dat de wet van uitgesloten derde niet zomaar aangenomen mocht worden.

Tegenwoordig zijn wiskundigen een stuk comfortabeler geworden met abstracte bewijsmethoden, en heeft bijna niemand meer problemen met de wet van uitgesloten derde. Toch wordt er nog wel onderzoek gedaan naar constructieve logica. Constructieve logica heeft bijvoorbeeld interessante verbanden met berekenbaarheid en types in programmeertalen.

Programmeertalen

Ik zal het verband met programmeertalen kort uitleggen. De bewering $A \to A$ is duidelijk waar. Het programmeren van een functie `id :: a -> a` (zoals je in de programmeertaal Haskell een functie aangeeft die objecten van een type a accepteert en objecten van type a

[1] Ter herinnering: Een rationaal getal kan als een breuk van twee gehele getallen geschreven worden en een irrationaal getal niet.

teruggeeft) is ook makkelijk: de functie die een object accepteert en dit vervolgens teruggeeft, voldoet. Een andere ware bewering is $(A \wedge B) \to A$ "als A en B allebei waar zijn, is A natuurlijk nog steeds waar". Ook deze bewering heeft een functie die er mee overeenkomt: de functie die de eerste helft van een tupel teruggeeft: `fst :: (a, b) -> a`.

Zo komt een implicatie ($\to$) overeen met een functie, een conjunctie ($\wedge$) met een tupel, een disjunctie ($\vee$) met het Either-type en de tegenspraak ($\perp$) met een type waar geen objecten van bestaan. Als we $A \to \perp$ schrijven voor $\neg A$, kunnen we zo logische zinnen vertalen naar types in Haskell en andersom. Dit verband kunnen we doortrekken naar logische zinnen waar ook variabelen en kwantoren in voorkomen. Hier is wel een sterker typesysteem voor nodig, met zogeheten *dependent types* die kunnen afhangen van variabelen. We zullen een verband omschrijven tussen wanneer een logische zin bewijsbaar is, en wanneer het mogelijk is om een functie te maken met het bijbehorende type.

Oneindige loops

Een functie die een oneindige loop bevat geeft nooit een resultaat terug, en mag dus ieder uitvoertype hebben. Dit is bijvoorbeeld een geldige definitie:

```
f :: a -> b
f x = f x
```

Omdat f voldoet aan het type ongeacht wat de types a en b zijn, zou f dus bij iedere logische implicatie horen, wat natuurlijk niet de bedoeling is. Een oplossing hiervoor is eisen dat onze programmeertaal geen oneindige loops mag hebben. Een taal die dit doet, is bijvoorbeeld Agda. Het is trouwens onmogelijk om het *stopprobleem* op te lossen; voor ieder programma zeggen of het een oneindige loop bevat of dat het ooit stopt. Agda lost dit op door het zekere voor het onzekere te nemen, en staat dus ook sommige programma's niet toe die wel ooit zouden stoppen.

Door oneindige loops te verbieden, kunnen we van elke functie met een bepaald type de bijbehorende logische zin bewijzen. Het verband geldt niet zomaar andersom, omdat we met de wet van uitgesloten derde kunnen bewijzen dat ieder computerprogramma ofwel een oneindige loop bevat, ofwel ooit ophoudt. Als we een functie zouden kunnen programmeren met het bijbehorende type, dan zou dat programma het stopprobleem kunnen oplossen, wat natuurlijk niet kan.

Als we enkel naar constructieve bewijzen kijken, gaat het verband daarentegen wel twee kanten op, en is een logische implicatie bewijsbaar precies als er een functie bestaat met het bijbehorende type. Dit komt doordat objecten van types hier de rol aannemen van de mentale constructies. Hierdoor is een programmeertaal zoals Agda[2] te gebruiken om wiskundige bewijzen door de computer te laten controleren, om zeker te weten dat er geen fouten in zitten.

[2] Agda heeft wel dependent types.

Waar?

Jim Vollebregt

Nee, deze twee foto's zijn geen moderne kunst, maar zijn genomen op een locatie op de Uithof. Denk jij te weten waar deze foto genomen is? Ga er dan langs, neem een foto van dezelfde plek en stuur je foto's op naar vakidioot@a-eskwadraat.nl. De winnaar krijgt een klein prijsje.

Een manier om nooit te vergeten

Babette de Wolff

Na een aantal afleveringen in Londen en Dartmoor te hebben opgenomen, kozen de makers van de serie Sherlock voor een minder voor de hand liggende locatie [SPOILER]: het 'mind palace' van het hoofdpersonage. Sherlock maakt in deze serie namelijk gebruik van een geheugentechniek waarbij hij objecten in (bekende) ruimten plaatst, om zo deze objecten beter te kunnen onthouden. Deze methode wordt ook succesvol gebruikt door mensen die minder gek/geniaal zijn dan Sherlock en is daarmee best de moeite van het bestuderen waard.

Stel dat je een lange rij (willekeurige) getallen of een gedicht wilt onthouden. Je kunt dan proberen om gewoon heel vaak de rij getallen of het gedicht te lezen en te hopen dat je het aan het eind kunt reproduceren. Je kunt echter ook geheugentechnieken gebruiken om dit te proberen te onthouden. Een populaire manier is het zogenaamde 'geheugenpaleis'. Het idee hiervan is dat je het gedeelte van je brein dat verantwoordelijk is voor het onthouden van plekken gebruikt om min of meer willekeurige andere dingen te onthouden.

Stel je een bekende plek voor, zoals je huis, de route die je naar de universiteit fietst of – als je net als Sherlock heel groots denkt – een paleis. Langs belangrijke punten op die plek of route plaats je de objecten die je wilt onthouden. Stel bijvoorbeeld dat je decimalen van π wilt onthouden door gebruik te maken van de bètagebouwen. We leggen de 3 bij de ingang van het Minnaert en de 1 boven aan de trap. Bij de deur tussen het Minnaert en het Koningsbergergebouw plaatsen we de 4, etc. Als we nu de string weer op willen noemen, lopen we in gedachte de route die we bedacht hebben af en 'kijken' welke getallen er langs liggen.

Sherlock in zijn geheugenpaleis. Het schijnt ook te werken als je er minder boeddhistisch bij kijkt.

Hoewel het in eerste instantie misschien wat omslachtig klinkt, wordt deze techniek veel gebruikt door zogenaamde 'mnemonisten', mensen die meedoen aan geheugenwedstrijden. Zonder dat zij een uitzonderlijk geheugen hebben, kunnen zij door veel te oefenen en door gebruik te maken van geheugentechnieken zoals deze, lange reeksen van getallen of andere objecten onthouden.

Hoewel de techniek dus effectief blijkt te zijn voor het onthouden van lange rijen objecten, is het niet de oplossing voor al je problemen. Onthouden waar je bijvoorbeeld je fietssleutel, telefoonoplader, teddybeer of ander willekeurig voorwerp dat je altijd kwijt bent, hebt gelaten, gaat namelijk niet per se makkelijker met deze techniek. Misschien kun je daar zelf leuke methode voor bedenken.

Pas jij bij DSW?